

**Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)**

Е.А. Елтаренко

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**  
**(системы массового обслуживания, теория игр,**  
**модели управления запасами)**

Москва 2007

**Федеральное агентство по образованию  
Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)**

Е.А. Елтаренко

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**  
**(системы массового обслуживания, теория игр,  
модели управления запасами)**

Учебное пособие

Москва 2007

УДК 519.8(075)

ББК 22.18я7

Е55

Елтаренко Е.А. Исследование операций (системы массового обслуживания, теория игр, модели управления запасами) [Электронный ресурс]: учебное пособие. М.: МИФИ. 2007.

Предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Теория игр и исследование операций» по специальности «Прикладная математика и информатика» (специализация «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности»), и может быть полезно для смежных специальностей.

Пособие в полном объеме соответствует программе вышеуказанной дисциплины.

Рекомендовано редсоветом МИФИ к изданию  
в качестве учебного пособия

Рецензент: к.т.н., доцент Салмин И.Д.

ISBN 978-5-7262-0756-8

© Московский инженерно-физический  
институт (государственный университет),  
2007

## Оглавление

Предисловие.....	5
1. Системы массового обслуживания.....	6
1.1. Основные понятия СМО.....	7
1.2. Потоки заявок.....	11
1.2.1. Простейший (пуассоновский) поток.....	11
1.2.2. Потоки Эрланга.....	15
1.2.3. Верификация потоков заявок.....	17
1.3. Марковские процессы.....	21
1.3.1. Марковские процессы с дискретными состояниями и дискретным временем перехода.....	22
1.3.2. Марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем перехода.....	24
1.3.3. Процессы гибели и размножения.....	27
1.4. Пуассоновские СМО.....	31
1.4.1. Одноканальные пуассоновские СМО.....	31
1.4.2. Многоканальные пуассоновские СМО.....	36
1.4.3. СМО с взаимопомощью каналов.....	41
1.4.4. СМО самообслуживания.....	45
1.4.5. Замкнутые СМО.....	46
1.4.6. Многофазные СМО.....	50
1.5. Пуассоновские сети СМО.....	55
1.5.1. Ациклические сети СМО.....	56
1.5.2. Циклические сети СМО.....	59
1.6. Непуассоновские СМО.....	61
1.6.1. Анализ непуассоновских СМО методом Эрланга....	62
1.6.2. Анализ непуассоновских СМО методом вложенных цепей Маркова.....	69
1.7. СМО с приоритетами.....	78
1.7.1. Одноканальные СМО с приоритетами.....	79
1.7.2. Многоканальные СМО с приоритетами.....	85
1.8. Оптимизация параметров СМО.....	86

2. Теория игр.....	94
2.1. Основные понятия теории игр.....	94
2.2. Матричные игры с седловой точкой.....	95
2.3. Матричные игры без седловой точки.....	97
2.3.1. Решение матричных игр $2 \times 2$ .....	99
2.3.2. Решение матричных игр $2 \times m$ графоаналитическим методом.....	102
2.3.3. Решение матричных игр $n \times 2$ графоаналитическим методом.....	104
2.3.4. Решение матричных игр $n \times m$ .....	104
2.4. Биматричные игры.....	109
2.4.1. Принципы решения биматричных игр.....	109
2.4.2. Решение биматричных игр $2 \times 2$ .....	111
2.4.3. Решение биматричных игр $n \times m$ .....	116
2.5. Диадические игры.....	118
2.6. Коалиционные игры.....	123
3. Задачи управления запасами.....	131
3.1. Постановка задач управления запасами.....	131
3.2. Детерминированные модели управления запасами ..	136
3.3. Вероятностные модели управления запасами.....	144
Заключение.....	152
Список литературы.....	153
Приложения.....	154
Приложение 1 Распределение Пирсона $\chi^2$ .....	154
Приложение 2 Распределение Колмогорова.....	154
Приложение 3 Основные положения $Z$ – преобразования.....	155

## Предисловие

Пособие подготовлено на основе многолетнего чтения лекций по одноименной дисциплине студентам, обучающимся по специальности «Прикладная математика».

Изложены три раздела исследования операций: системы массового обслуживания (СМО), теория игр, модели управления запасами. СМО актуальны при проектировании вычислительных сетей, менеджменте. И в настоящее время в научных журналах выделены в качестве отдельных разделов тематика систем массового обслуживания (см. журнал «Автоматика и телемеханика»). В разделе «Теория игр» приведены основные положения и рассмотрены основные классы задач теории игр, для более глубокого изучения теории игр рекомендуется [6]. Модели управления запасами находят применение в менеджменте, они получили второе рождение в современных областях – логистике, корпоративных информационных системах [7, 8].

Другие разделы исследования операций, такие как линейное, динамическое программирование изучаются в специальной дисциплине «Математическое программирование».

При подготовке настоящего пособия использованы учебники [1, 2], учебные пособия МИФИ [3, 4, 5].

Цель, которая ставится в курсе лекций – не только дать знания студентам, но и научить их самостоятельно решать поставленные задачи, выводить формулы при анализе объектов исследования. Поэтому пособие не является справочным материалом для решения задач исследования операций, в нем акцентируется внимание на математических выкладках, доказательствах.

Автор признателен рецензенту Салмину И.Д. за обсуждение и ценные предложения по совершенствованию пособия.

## **1. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

В практике системных аналитиков довольно часто приходится работать с системами массового обслуживания (СМО). К таким системам относятся вычислительные, телефонные сети, интернет-сеть, магазины, торговые центры, билетные кассы и т.д. Отличительными особенностями СМО являются потоки заявок на обслуживание, поступающих в случайные моменты времени, и каналы (приборы) обслуживания заявок, время обслуживания в которых также может быть случайной величиной. Из-за случайности потоков заявок в системе может образовываться очередь, меняющаяся во времени.

При анализе СМО исследователей интересуют ее характеристики: загруженность СМО, количество заявок в системе, длина очереди, время пребывания заявок в системе, время нахождения в очереди и пр. При проектировании СМО, когда накладываются ограничения на ее параметры, возникает вопрос о величине потоков заявок, которые может обслужить система, или какой интенсивностью должны обладать каналы обслуживания, чтобы обеспечить необходимое качество обслуживания заданных потоков заявок, и множество других вопросов.

Анализ СМО имеет целью определить ее характеристики и при необходимости оптимизировать параметры системы.

Несмотря на имеющееся в настоящее время большое количество средств имитационного моделирования, интерес к математическому решению задач анализа СМО не ослабевает, так как реализуется возможность глубокого познания процессов функционирования разного класса систем, обеспечения получения точного решения.

В данном разделе рассматривается значительное количество классов СМО, которые дают представление о многообразии таких систем, множестве подходов и методов, используемых при их анализе.

## 1.1. Основные понятия СМО

Рассмотрим основные понятия СМО, их характеристики, классификацию. Ниже представлена структурная схема СМО.



*а) характеристики (параметры) входного потока заявок:*

$f(\tau)$  – плотность функции распределения интервала между поступлениями заявок;

$\lambda$  – интенсивность входного потока;

*б) характеристики (параметры) каналов обслуживания заявок:*

$\varphi(\tau)$  – плотность функции распределения времени обслуживания аппарата;

$\mu$  – интенсивность обслуживания;

$m$  – число каналов обслуживания;

*в) характеристики (параметры) очереди:*

$N$  – максимальное число мест в очереди;

$D$  – дисциплина очереди:

- первым пришел – первым ушел (FIFO);
- последним пришел – первым ушел (LIFO);
- с приоритетами;
- случайный выбор из очереди.

Описание системы массового обслуживания включает задание ее параметров  $\langle f(\tau), \varphi(\tau), m, N, D \rangle$ .

### Классификация СМО

Если  $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$ ;  $\varphi(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}$  (см. п.1.2.), то такие СМО называются пуассоновскими.

$m = 1$  – одноканальные СМО;

$m > 1$  – многоканальные СМО;

$N = 0$  – системы без очередей;  
 $N \rightarrow \infty$  – системы с бесконечной очередью;  
 $N > 0$  (произвольное конечное число) – системы с ограниченной очередью.

В разделе также рассматриваются следующие классы систем:

– СМО с взаимопомощью каналов обслуживания. Если есть  $m$  каналов, каждый из которых обладает интенсивностью  $\mu$ , то в процессе обслуживания заявок они могут оказывать взаимопомощь, что сказывается на характеристиках СМО;

– СМО самообслуживания;

– замкнутые СМО (с несколькими источниками заявок);

– многофазные СМО, в которых обслуживание заявок осуществляется в несколько фаз (этапов);

– сети СМО, узлами сети являются отдельные СМО. Выделяют ациклические сети (рис. 1.1) и циклические сети (рис. 1.2).

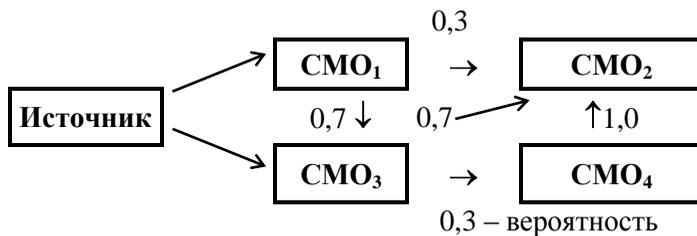


Рис. 1.1. Топология ациклической сети СМО

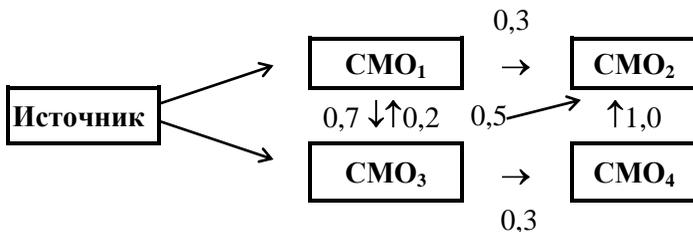


Рис. 1.2. Топология циклической сети СМО

## Характеристики СМО

### Основные характеристики

$L_s$  – среднее число заявок в СМО;

$W_s$  – среднее время пребывания заявок в СМО;

$L_q$  – средняя длина очереди;

$W_q$  – среднее время ожидания заявок в очереди;

$P_{\text{отк}}$  – вероятность отказа в обслуживании;

$P_0$  – вероятность того, что в системе отсутствуют заявки (часть времени, когда каналы обслуживания простаивают).

### Производные характеристики

$N - L_q$  – среднее число свободных мест в очереди;

$C_s - L_q$  – среднее число занятых каналов;

$n - (C_s - L_q)$  – среднее число свободных (простаивающих) каналов;

$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda (1 - P_{\text{отк}})$  – эффективный (реальный) поток заявок, который обслуживается.

### Связи между основными характеристиками (формулы Литтла)

В установившемся режиме функционирования СМО будем фиксировать число заявок в системе во времени  $n(t)$ . Результаты представлены на рис. 1.3, он показывает, сколько заявок находится в каждый момент времени в СМО.

Обозначим через  $A = \int_{t_1}^{t_2} n(t) dt$ ,  $T = t_2 - t_1$  – время наблюдения.

Среднее число заявок в СМО будет определяться из выражения:  $L_s = A/T$ ; число заявок, обслуженных за интервал времени  $T$ :  $B = \lambda_{\text{эфф}} \cdot T$ ; среднее время пребывания заявок в СМО определяется из  $W_s = A/B = A / (\lambda_{\text{эфф}} \cdot T)$ .

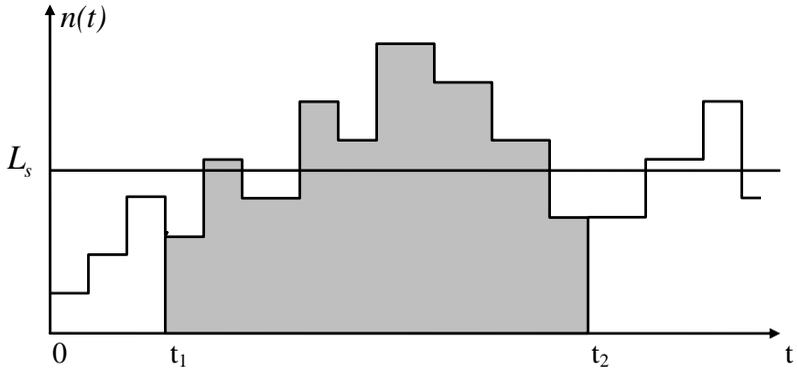


Рис. 1.3. График изменения числа заявок в СМО во времени

Сравнивая выражения для  $L_s$  и  $W_s$ , можем записать связь между ними:

$$L_s = \lambda_{\text{эфф}} \cdot W_s. \quad (1.1)$$

Аналогично для средней длины очереди получим:

$$L_q = \lambda_{\text{эфф}} \cdot W_q. \quad (1.2)$$

$W_s$  и  $W_q$  отличаются временем обслуживания.

$$W_s = W_q + \tau, \quad (1.3)$$

где  $\tau = \int_0^{\infty} \varphi(t) \cdot t \cdot dt$  – среднее время обслуживания.

Таким образом, вычислив  $L_s$  и  $P_{\text{отк}}$ , можно, используя (1.1), (1.2), (1.3), вычислить все основные характеристики:

$$L_s, P_{\text{юе}} \rightarrow \lambda_{\text{юе}} \rightarrow W_s = L_s / \lambda_{\text{юе}} \rightarrow W_q = W_s - \tau.$$

Отметим также следующие соотношения:

$$L_s - L_q = \lambda_{\text{эфф}} (W_s - W_q);$$

$$W_s - W_q = \tau;$$

$$\lambda_{\text{эфф}} = \frac{(L_s - L_q)}{\tau}.$$

Чтобы найти  $L_s$ , необходимо определить  $P_n$  (вероятности того, что в СМО находится ровно  $n$  заявок), так как

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n.$$

Таким образом, задача определения характеристик СМО сводится к определению вероятностей  $P_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

## 1.2. Потоки заявок

В СМО входной поток заявок случайный. Если же заявки поступают через определенный интервал времени  $T = \text{const}$ , то такой поток называется *регулярным*.

Остановимся на общем случае, когда для его описания требуется задать  $f(\tau)$  – плотность функции распределения интервала между поступлением заявок, и  $\lambda$  – интенсивность, определяемая числом заявок в единицу времени.

Рассмотрим несколько видов потоков, которые нам потребуются для анализа СМО.

### 1.2.1. Простейший (пуассоновский) поток

Свойства потока:

– стационарность: число заявок за интервал  $t$  зависит только от величины  $t$  и не зависит от расположения интервала  $t$  на временной оси. Для стационарного потока  $\lambda = \text{const}$ ;

– беспоследствие: число заявок в интервал  $t_1$  не зависит от числа заявок за другой интервал  $t_2$ , если они не пересекаются;

– ординарность: вероятность поступления в интервал времени  $\Delta t$  больше одной заявки стремится к нулю.

Исходя из этих свойств, получим распределение Пуассона.

Выберем конечный интервал  $t$ , на нем  $\Delta t$ :

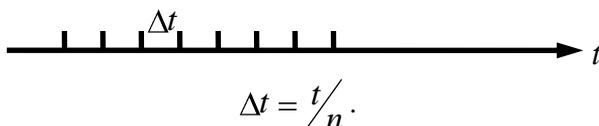


Из свойства ординарности:

$P_1 = \lambda \cdot \Delta t$  – вероятность того, что за  $\Delta t$  поступит 1 заявка;

$P_0 = 1 - \lambda \cdot \Delta t$  – вероятность того, что за  $\Delta t$  не поступит заявок.

Разделим интервал  $t$  на  $n$  равных участков:



Вероятность того, что за интервал  $t$  наступит ровно  $m$  заявок, равна:

$$P_m = C_n^m \left( \frac{\lambda t}{n} \right)^m \left( 1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-m}.$$

Учитывая свойство беспоследствия:

$$P_1 = \frac{\lambda t}{n}, \quad P_0 = 1 - \frac{\lambda t}{n}$$

$$P_m = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \left( \frac{\lambda t}{n} \right)^m \left( 1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-m}$$

$$P_m = \frac{n^m - n^{m-1} + n^{m-2} \dots + n}{n^m} \cdot \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot \frac{\left( 1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-m}}{\left( 1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^m}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \left( 1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-m} \quad (1.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{\frac{n}{\lambda t}} \right]^{\lambda t} = e^{-\lambda t}. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.4), получим:

$$P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \text{ – вероятность того, что за время } t \text{ поступит ровно}$$

$m$  заявок.

Обозначим  $\lambda t = a$ , тогда  $P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ ;  $\lambda = \text{const}$  (используется свойство стационарности). Полученное  $P_m$  определяет распределение Пуассона, отсюда и название потока заявок.

Вероятности  $P_m$  рассчитываются на основе  $P_{m-1}$ :

$$P_0 = e^{-\lambda t};$$

$$P_1 = \lambda t \cdot e^{-\lambda t} = \lambda t \cdot P_0;$$

$$P_2 = \frac{(\lambda t)^2}{2} \cdot e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t}{2} \cdot P_1;$$

$$P_3 = \frac{\lambda t}{3} \cdot P_2.$$

Математическое ожидание числа заявок за интервал  $t$ :

$$\begin{aligned} M(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} m P_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = (\lambda t) \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} = \\ &= \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!}}_{e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

$$M(m) = \lambda t.$$

Дисперсия числа заявок за интервал  $t$ :

$$\begin{aligned} D(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} (m - \lambda t)^2 \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left[ m^2 - 2m\lambda t + (\lambda t)^2 \right] \frac{(\lambda t)^m}{m!} = \\ &= e^{-\lambda t} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2 (\lambda t)^m}{m!} - 2\lambda t \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{(\lambda t)^m}{m!} + (\lambda t)^2 \cdot e^{-\lambda t} \right] = \\ &= e^{-\lambda t} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} m (\lambda t) \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} - (\lambda t)^2 \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Произведем замену  $m = m - 1$ :

$$\begin{aligned}
 D(n) &= e^{-\lambda t} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (n+1) \frac{(t)^m}{m!} - (t)^n = \\
 &= e^{-\lambda t} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{(t)^m}{m!}}_{\lambda t} + e^{-\lambda t} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda t (t)^m}{m!}}_{\lambda t} - (t)^n = \\
 D(m) &= \lambda t.
 \end{aligned}$$

Отметим полученную отличительную особенность пуассоновского распределения – математическое ожидание равно дисперсии.

Определим плотность функции распределения интервала времени между моментами поступления заявок в пуассоновском потоке:

$$f(t) = P_0 \lambda dt = e^{-\lambda t} \lambda dt.$$

Откуда следует, что искомая функция  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  (экспоненциальное распределение). Математическое ожидание и дисперсия этого распределения равны:

$$M(t) = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} d\lambda t = -te^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda};$$

$$D(t) = \int_0^{\infty} \lambda \left( -\frac{1}{\lambda} \right)^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Следовательно, пуассоновский поток заявок можем описать либо распределением Пуассона количества заявок за определенный интервал времени, либо экспоненциальным распределением времени между моментами поступления заявок.

Отметим, что вероятность того, что за малый промежуток времени  $\Delta t$  поступит заявка, равна

$$f(\Delta t) = \lambda e^{-\lambda \Delta t} dt.$$

### **Операции с пуассоновскими потоками:**

а) суперпозиция (объединение) двух или нескольких пуассоновских потоков образует пуассоновский поток;

б) операция случайного просеивания (разделения) пуассоновского потока дает на выходе пуассоновские потоки. При разделении потока должно быть задано дискретное распределение вероятностей, с которыми заявки из основного (входного) потока попадают в каждый из выходных потоков. Суть операции: каждая заявка из входного потока переходит в один из выходных в соответствии с заданным распределением.

При случайном просеивании заявок сохраняются все его свойства (ординарности, безпоследствия, стационарности).

### 1.2.2. Поток Эрланга

Пусть имеем пуассоновский поток:  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ :



Проведем регулярное (не случайное) просеивание потока. Если будем исключать каждую вторую заявку, то получим поток Эрланга второго порядка. Если оставлять каждую третью, то получим поток Эрланга третьего порядка и т.д.

Плотность распределения интервала времени между заявками потока Эрланга второго порядка равна:

$$f_2(t) dt = \frac{\lambda^2}{1!} e^{-\lambda t} \lambda dt = \lambda^2 t \lambda^{-\lambda} dt.$$

Плотность функции распределения потока Эрланга 2-го порядка (рис. 1.4):

$$f_2(t) = \lambda^2 t \lambda^{-\lambda}.$$

Для потока  $k$  порядка получим:

$$f_k(t) dt = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \lambda dt = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt,$$

$$f_k(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}.$$

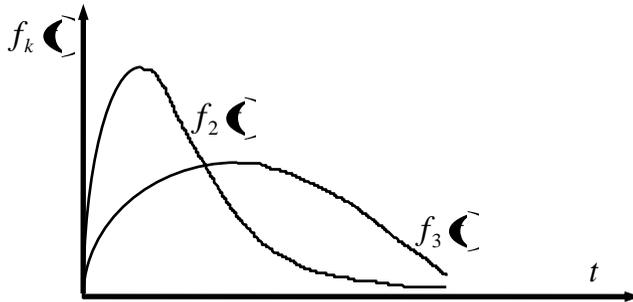


Рис. 1.4. Плотность функции распределения Эрланга

Математическое ожидание интервала времени между заявками потока Эрланга порядка  $k$  равно:

$$M(t) = k/\lambda,$$

где  $\lambda$  – интенсивность пуассоновского потока, из которого сгенерирован поток Эрланга (порождающего пуассоновского потока).

Дисперсия интервала времени между заявками потока Эрланга порядка  $k$  равна:

$$D(t) = k/\lambda^2.$$

Интенсивность потока Эрланга  $\lambda_3$  равна:

$$\lambda_3 = \lambda/k \Rightarrow \lambda = \lambda_3 k.$$

Выразим функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию через  $\lambda_3$ .

$$f_k(t) = \frac{\lambda_3 k (\lambda_3 k t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda_3 k t};$$

$$M(t) = 1/\lambda_3;$$

$$D(t) = \frac{k}{k^2 \lambda_3^2} = \frac{1}{k \lambda_3^2}.$$

## Аппроксимация произвольного потока заявок

### потоком Эрланга

Пусть задана произвольная плотность функции распределения  $\varphi(\tau)$  – интервал времени между заявками для произвольного закона с  $M\tau$  и  $D\tau$ .

Для потока Эрланга:

$$\frac{M\tau}{\sqrt{D\tau}} = \frac{1}{\lambda_y} \cdot \sqrt{k} \cdot \lambda_y = \sqrt{k} \Rightarrow k = \frac{M^2\tau}{D\tau}. \quad (1.6)$$

*Пример.*

Пусть задан поток неизвестного распределения с интенсивностью  $\lambda = 15$  заявок/ч,  $M\tau = 4$  мин.;  $D\tau = 1$  мин.<sup>2</sup>

Данный поток можно аппроксимировать потоком Эрланга  $\frac{M^2\tau}{D\tau} = \frac{4^2}{1} = 16$  порядка с интенсивностью  $\lambda_y = 15$ , который генерируется из пуассоновского потока с интенсивностью  $\lambda = 15 \times 16 = 240$  заявок/ч.

### 1.2.3. Верификация потоков заявок

При исследовании СМО необходимо в первую очередь проанализировать входной поток заявок с целью определения его характеристик. Для этого производится регистрация в той или иной форме моментов поступления заявок за длительный период времени. По этим данным можно построить гистограмму распределения числа заявок за заданный отрезок времени, например, 1 ч, или распределение интервала времени между поступлением заявок в СМО.

Рассмотрим вопросы анализа потока заявок на примере. Пусть в течение  $N = 121$  ч вели наблюдение за поступлением заявок, в результате получили распределение числа заявок в час, приведенное в табл. 1.1 и на рис. 1.5 ( $n$  – количество заявок, поступивших за 1 час,  $m_n$  – число часов из 121, в которые зарегистрировано поступление ровно  $n$  заявок).

Таблица 1.1

**Распределение числа заявок в час**

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$m_n$	10	31	40	20	10	4	6

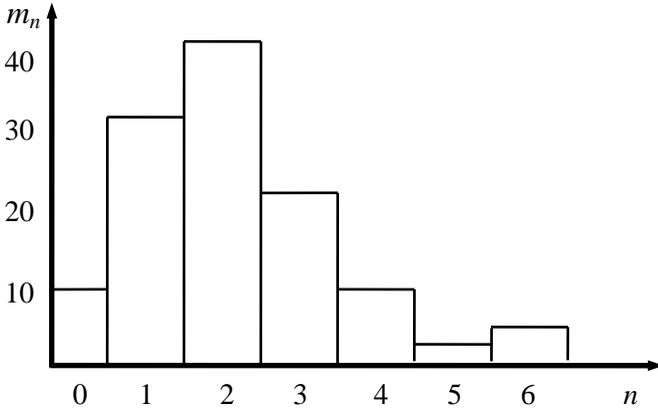


Рис. 1.5. Гистограмма распределения числа заявок

Вычислим среднее число заявок в час:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^6 n \cdot \frac{m_n}{N} = \frac{(0 \cdot 0 + 31 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 6)}{121} = 2,207.$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$S_n^2 = \sum_{n=0}^6 \left( n - \bar{n} \right)^2 \cdot \frac{m_n}{N} = 2,147.$$

Так как математическое ожидание и оценка дисперсии близки, то можно выдвинуть гипотезу, что это распределение Пуассона.

Проверим гипотезу по критерию согласия, сначала – по критерию Пирсона (табл. 1.2):

$$\bar{n} = 2,207 = \lambda \text{ – интенсивность потока.}$$

Отметим, что в каждом интервале  $m_n$  должно быть не менее 6. Если меньше, то необходимо объединить интервалы.

Таблица 1.2

**Расчеты для проверки гипотезы по критерию Пирсона**

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$m_n$	10	31	40	20	10	4	6
$P_n$	0,110	0,242	0,267	0,195	0,110	0,076	
$NP_n$	13,3	29,2	36,3	23,6	13,3	9,1	

*объединили  
интервалы*

$P_n$  – вероятности поступления за 1 ч ровно  $n$  заявок, соответствующие распределению Пуассона:

$$P_0 = e^{-2,2} = 0,110; P_1 = \lambda t \cdot e^{-2,2} = 2,2 \cdot 0,110 = 0,242;$$

$$P_2 = \frac{2,2}{2} \cdot P_1 = 0,267; P_3 = \frac{2,2}{3} \cdot P_2 = 0,195; P_4 = \frac{2,2}{4} \cdot P_3 = 0,110;$$

$$P_5 = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4.$$

**Критерий Пирсона**

$\chi^2 = \sum_{m=0}^5 \frac{(m_n - NP_n)^2}{NP_n}$ ,  $\nu = 6 - 1 - 1 = 4$  (число степеней свободы).

$$\chi_{\text{расч}}^2 = \frac{(10 - 13,3)^2}{13,3} + \dots + \frac{(4 - 9,1)^2}{9,1} = 3,11.$$

$\alpha = 0,2$  – уровень значимости (вероятность ошибки второго рода).

$$\chi_{\text{табл.}}^2 = 5,898 \text{ (распределение Пирсона приведено в приложении 1).}$$

Сравниваем  $\chi_{\text{расч}}^2$  и  $\chi_{\text{табл.}}^2$ . Если расчетное больше табличного, то распределение не пуассоновское, но мы ошибаемся с вероятностью  $\alpha = 0,2$ . Если расчетное меньше табличного, то не можем отвергнуть гипотезу, что это пуассоновское распределение.

Чем меньше  $\chi^2_{\text{расч}}$ , тем с большей уверенностью мы можем говорить, что это пуассоновское распределение.

Критерий Пирсона позволяет отвергнуть выдвинутую гипотезу, но не дает ответ, что это именно пуассоновское распределение.

Рассмотрим еще один критерий согласия.

### Критерий Колмогорова

Для проверки гипотезы необходимо заполнить табл. 1.3.

Таблица 1.3

#### Расчеты для проверки гипотезы по критерию Колмогорова

$n$	0	1	2	3	4	5-6
$F^*(\hat{q})$	0,083	0,342	0,675	0,844	0,925	1,0
$F(\hat{q})$	0,110	0,352	0,619	0,814	0,924	1,0
$ \Delta $	0,027	0,010	0,056	0,030	0,001	0,0

$F^*(\hat{q})$  – функция распределения, полученная из экспериментальных данных;

$F(\hat{q})$  – теоретическая функция распределения, соответствующая пуассоновскому распределению:

$$F^*(0) = \frac{m_0}{N} = \frac{10}{121} = 0,083, \quad F^*(1) = F^*(0) + \frac{m_1}{N} \text{ и т.д.}$$

$$F(0) = P_0, \quad F(1) = P_0 + P_1, \quad F(2) = P_0 + P_1 + P_2.$$

$D = \max |F^*(\hat{q}) - F(\hat{q})| = \max |\Delta| = 0,056$  – максимальное отклонение теоретической и экспериментальной функций распределения.

Статистика для проверки гипотезы рассчитывается по формуле:

$$\xi_{\text{расч}} = D\sqrt{N}, \text{ в нашем примере } \xi_{\text{расч}} = 0,056 \cdot \sqrt{121} = 0,616.$$

В приложении 2 приведено распределение Колмогорова.  $P_{расч}$  – вероятность того, что расхождение между теоретическим и экспериментальным произошло из-за случайных факторов.

Для рассматриваемого примера  $P_{расч} = P_{0,616} = 0,850$ , т.е. с вероятностью 0,850 экспериментальное распределение расходится с пуассоновским из-за случайных факторов.

### **Вопросы и задания**

1. Какие свойства характерны для пуассоновских потоков?
2. Какие операции можно производить над пуассоновскими потоками, чтобы результирующие потоки тоже были пуассоновскими?
3. Докажите, что в результате суперпозиции двух и более пуассоновских потоков заявок результирующий поток будет тоже пуассоновский.
4. Какой поток описывают потоки Эрланга при стремлении их порядка к бесконечности?
5. Для ответа на какие вопросы следует использовать критерий Колмогорова и на какие – критерий Пирсона?
6. При исследовании потока заявок регистрировалось количество заявок, поступающих каждый час. В результате наблюдений в течение 100 ч получили следующие данные:

Число заявок в час	0	1	2	3	4	5	6
Кол-во наблюдений	8	14	36	17	10	8	7

Используя критерии Пирсона и Колмогорова проверить гипотезу о том, что поток заявок является Пуассоновским потоком.

### **1.3. Марковские процессы**

Математический аппарат марковских процессов используется для анализа систем массового обслуживания. Поэтому прежде чем переходить к анализу СМО, остановимся на марковских процессах. При этом будем рассматривать только те вопросы, которые требуются для анализа СМО.

Пусть в объекте моделирования определены состояния  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ , например, в системе массового обслуживания:

$S_0$  – в СМО нет заявок,

$S_1$  – в СМО одна заявка,

$S_2$  – в СМО две заявки и т.д.

С течением времени СМО переходит из одного состояния в другое.

Рассмотрим марковские процессы с дискретными состояниями (число состояний конечно или счетно). При этом выделим:

а) марковские процессы с дискретным временем перехода (моменты перехода заранее определены);

б) марковские процессы с непрерывным временем перехода (момент перехода не определен, случаен).

Отметим, что марковские процессы обладают свойством безпоследствия.

### 1.3.1. Марковские процессы с дискретными состояниями и дискретным временем перехода

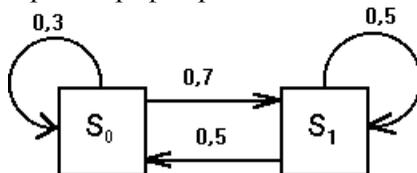
Пусть система находится в состоянии  $S_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Для задания марковского процесса необходимо определить матрицу вероятностей перехода из одного состояния в другое.

Пример матрицы переходов:

$$\|P_{ij}\| = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_0 & S_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,5 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Для заданной матрицы граф переходов имеет вид:



Так как на каждом следующем шаге система переходит в другое состояние, то  $\sum_{j=0}^n P_{ij} = 1$ .

Пусть задан вектор вероятностей в первый момент времени:

$$\bar{P}^0 = \langle P_0^0, P_1^0 \rangle.$$

Какова вероятность нахождения системы в состоянии  $i$  после первого перехода?

$$P_i^1 = \sum_{j=0}^n P_j^0 P_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.6)$$

В векторном виде (1.6):  $\bar{P}^1 = \bar{P}^0 \|P_{ij}\|$ .

На шаге  $k$  получим уравнение:

$$\bar{P}^k = \bar{P}^{k-1} \|P_{ij}\| = \bar{P}^0 \left( \|P_{ij}\| \right)^k. \quad (1.7)$$

Если  $P_{ij} = \text{const}$  (не зависит от шага), то процесс называется *однородным*.

При устремлении  $k$  к бесконечности получим вектор предельных вероятностей:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{P}^k = \bar{P}.$$

Процесс, в котором вектор предельных вероятностей не зависит от вектора начального состояния, называется *эргодическим*.

Если матрица переходов неприводима (т.е. из каждого состояния можно достигнуть любое другое состояние), то существует вектор предельных вероятностей.

Пример неприводимой матрицы переходов:

	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	
$S_0$	0,3	0,7	0	0	.
$S_1$	0,4	0	0,6	0,5	
$S_2$	0,3	0	0,5	0,7	
$S_3$	0	0	0,2	0,8	

### 1.3.2. Марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем перехода

Пусть система может находиться в состояниях  $S_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

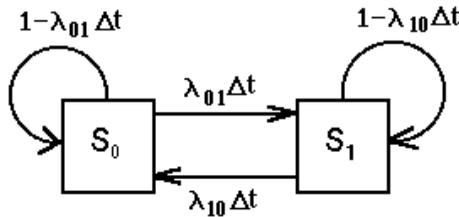
Время перехода – случайная величина.

$\lambda_{ij}$  – интенсивность перехода из состояния  $S_i$  в  $S_j$ .

За время  $\Delta t$  вероятность перехода  $P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t$ .

Если  $\lambda_{ij} = \text{const}$  (не зависит от времени), то это *однородный марковский процесс*.

Рассмотрим случай с двумя состояниями:



$$P_{ij}(\Delta t) \approx \begin{vmatrix} 1 - \lambda_{01}\Delta t & \lambda_{01}\Delta t \\ \lambda_{10}\Delta t & 1 - \lambda_{10}\Delta t \end{vmatrix}$$

Составим конечно-разностное уравнение для определения  $P_i(\Delta t)$ .

Для первого состояния:

$$P_0(+\Delta t) \approx P_0(\Delta t) - \lambda_{01}\Delta t P_0(\Delta t) + \lambda_{10}\Delta t P_1(\Delta t) \quad (1.8)$$

$$P_1(+\Delta t) \approx P_1(\Delta t) - \lambda_{10}\Delta t P_1(\Delta t) + \lambda_{01}\Delta t P_0(\Delta t) \quad (1.9)$$

Из (1.8) получим:

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \frac{-P_0(t)\lambda_{01}\Delta t + P_1(t)\lambda_{10}\Delta t}{\Delta t},$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda_{01} + P_1(t)\lambda_{10}. \quad (1.10)$$

Из (1.9) получим

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -P_1(t)\lambda_{10} + P_0(t)\lambda_{01}. \quad (1.11)$$

Следует иметь в виду, что в любой момент  $t$   $P_1(t) + P_0(t) = 1$ .

Примем за начальное состояние системы  $P_0(0) = 1, P_1(0) = 0$ , тогда решением дифференциального уравнения (1.10) будет:

$$P_0(t) = \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} + \lambda_{01}} + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10} + \lambda_{01}} e^{-(\lambda_{01} + \lambda_{10})t} \quad (1.12)$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10} + \lambda_{01}} \left[ 1 - e^{-(\lambda_{01} + \lambda_{10})t} \right]. \quad (1.13)$$

Графически (1.12) и (1.13) представлены на рис. 1.6.

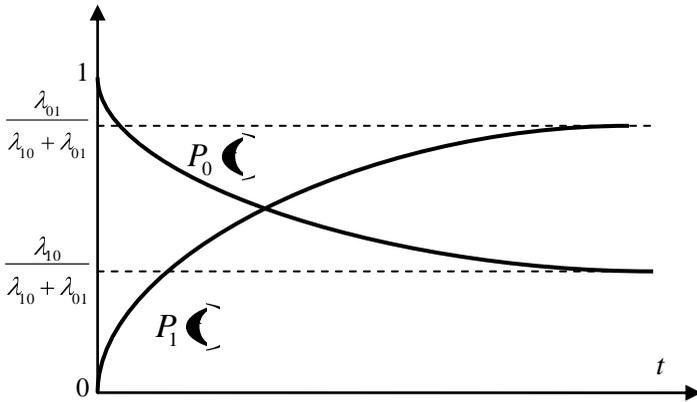


Рис.1.6. Решение системы уравнений марковского процесса

При стремлении  $t$  к бесконечности получим предельные вероятности:  $P_0 = \lim P_0 \mathbf{C}, P_1 = \lim P_1 \mathbf{C}$ .

Для определения  $P_0$  и  $P_1$  приравняем производные из системы уравнений (1.10) и (1.11) к нулю:

$$\begin{cases} \frac{dP_0 \mathbf{C}}{dt} = 0 \\ \frac{dP_1 \mathbf{C}}{dt} = 0. \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} P_1 \lambda_{10} = P_0 \lambda_{01} \\ P_1 + P_0 = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим случай для четырех состояний (рис. 1.7). Для простоты изображения размеченного графа  $\Delta t$  будем опускать.

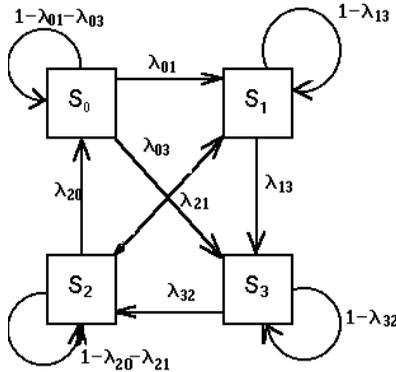


Рис.1.7. Размеченный граф

Система уравнений для данного графа приведена ниже.

$$P_0 \mathbf{C} (+ \Delta t) = P_0 \mathbf{C} (- \lambda_{01} \Delta t - \lambda_{03} \Delta t) + P_2 \mathbf{C} \lambda_{20} \Delta t$$

$$\frac{dP_0}{dt} = -P_0 \mathbf{C} (\lambda_{01} + \lambda_{03}) + P_2 \mathbf{C} \lambda_{20}$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -P_1\lambda_{13} + P_0\lambda_{01} + P_2\lambda_{21}$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -P_2(\lambda_{20} + \lambda_{21}) + P_3\lambda_{32}$$

$$\frac{dP_3}{dt} = -P_3\lambda_{32} + P_1\lambda_{13} + P_0\lambda_{03}$$

В общем случае, когда число состояний  $S_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), система уравнений примет вид:

$$\frac{dP_i}{dt} = -P_i \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ij} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n P_k \lambda_{ki}$$

Эту систему уравнений по имени автора называют *системой уравнений Колмогорова*.

Для определения предельных вероятностей  $\frac{dP_i}{dt} = 0$  получим систему линейных уравнений:

$$P_i \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ij} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n P_k \lambda_{ki} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=0}^n P_i = 1.$$

### 1.3.3. Процессы гибели и размножения

Процессами гибели и размножения называются марковские процессы, имеющие размеченный граф, приведенный на рис.1.8.

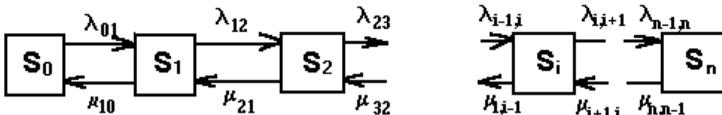


Рис.1.8. Размеченный граф процессов гибели и размножения

$\lambda_{ij}$  – интенсивности размножения,  $\mu_{ji}$  – интенсивности гибели.

Для нахождения вектора предельных вероятностей  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) составим систему уравнений:

$$P_0 \lambda_{01} = P_1 \mu_{10} \quad (\text{по Колмогорову}), \quad (1.14)$$

$$P_1 (\lambda_{12} + \mu_{10}) = P_0 \lambda_{01} + P_2 \mu_{21}. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.14) в (1.15), получим:

$$P_1 \lambda_{12} + P_1 \mu_{10} = P_1 \mu_{10} + P_2 \mu_{21}$$

$$P_1 \lambda_{12} = P_2 \mu_{21}.$$

Для всех последующих состояний уравнения будут иметь одинаковый вид:

$$P_i \lambda_{i,i+1} = P_{i+1} \mu_{i+1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Чтобы определить все предельные вероятности, воспользуемся условием:  $\sum_{i=0}^n P_i = 1$ . Для этого выразим  $P_i$  через  $P_0$ :

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}} \cdot \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} P_0. \quad (1.16)$$

Введем обозначение  $\rho_i = \frac{\lambda_{i,i+1}}{\mu_{i+1,i}}$ , тогда (1.14) и (1.16) запишутся в

виде:  $P_1 = \rho_1 P_0$ ;  $P_2 = \rho_1 \rho_2 P_0$ .

Все оставшиеся вероятности выражаются через  $P_0$ :

$$P_i = \prod_{j=1}^i \rho_j P_0.$$

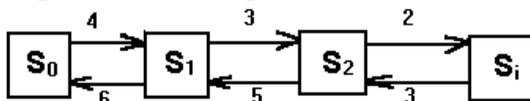
В результате получим выражение для  $P_0$ :

$$P_0 = \left[ 1 + \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^i \rho_j \right]^{-1}.$$

Определив  $P_0$ , можем рассчитать все  $P_i$ .

Пример анализа процесса гибели и размножения.

Пусть задан процесс гибели и размножения:



$$\|\lambda_{ij}\| = \begin{matrix} & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

Расчет предельных вероятностей:

$$P_1 = \frac{4}{6} P_0 = \frac{2}{3} P_0;$$

$$P_2 = \frac{3}{5} P_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} P_0 = \frac{2}{5} P_0;$$

$$P_3 = \frac{2}{3} P_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} P_0 = \frac{4}{15} P_0;$$

$$P_0 \left[ 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{15} \right] = 1;$$

$$P_0 = \frac{3}{7}, \quad P_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}, \quad P_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}, \quad P_3 = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{35}.$$

### Вопросы и задачи

1. Определить предельные вероятности состояний в марковской цепи, описываемой следующей матрицей вероятностей переходов. В начальный момент система находится в первом состоянии

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$S_1$	0,3	0,3	0,4
$S_2$	0,0	1,0	0,0
$S_3$	0,0	0,0	1,0

2. Управляемый объект имеет 4 возможных состояния. Через каждый час производится снятие информации и перевод объекта из одного состояния в другое в соответствии со следующей матрицей вероятностей переходов:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$S_1$	0,3	0,4	0,0	0,3
$S_2$	0,2	0,2	0,4	0,2
$S_3$	0,4	0,3	0,2	0,1
$S_4$	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти вероятности нахождения объекта в каждом из состояний после второго часа, если в начальный момент он находился в состоянии  $S_3$ .

3. По заданным коэффициентам системы уравнений Колмогорова составить размеченный граф состояний. Определить коэффициенты А, В, С, Д в уравнениях:

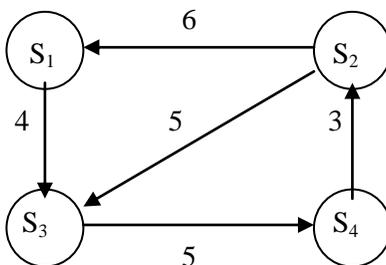
$$-A P_1 + 4 P_2 + 5 P_3 = 0$$

$$-B P_2 + 4 P_1 + 2 P_4 = 0$$

$$-C P_3 + 2 P_2 + 6 P_1 = 0$$

$$-D P_4 + 7 P_1 + 2 P_3 = 0.$$

4. Физическая система имеет 4 состояния. Размеченный граф состояний приведен ниже.



Определить предельные вероятности состояний системы.

## 1.4. Пуассоновские СМО

В пуассоновских СМО входной поток заявок – пуассоновский, т.е.  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , а время обслуживания распределено по экспоненциальному закону  $\varphi(t) = \mu e^{-\mu t}$ .

### 1.4.1. Одноканальные пуассоновские СМО

**СМО без очереди ( $N=0$ ).** Используем теорию процессов гибели и размножения для определения вероятностей  $P_0, P_1$  (рис. 1.9).

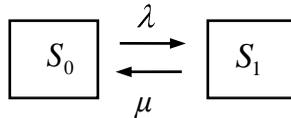


Рис. 1.9. Размеченный граф СМО без очереди

$$P_1 = P_0 \cdot \lambda / \mu \Rightarrow P_0 \cdot \lambda / (\mu + \lambda) = 1;$$

$$P_1 + P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Вероятность отказа заявки в обслуживании равна  $P_1$ :

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Среднее число заявок в системе равно:

$$L_s = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (1.17)$$

Среднее время пребывания в СМО равно среднему времени обслуживания:

$$W_s = 1 / \mu; \quad (1.18)$$

так как очереди в СМО нет, то

$$W_q = 0, L_q = 0.$$

Эффективный поток заявок определяется по формуле:

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda (1 - P_{\text{отк}}) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \lambda.$$

**СМО с ограниченной очередью**

Размеченный граф данного класса СМО представлен на рис. 1.10.

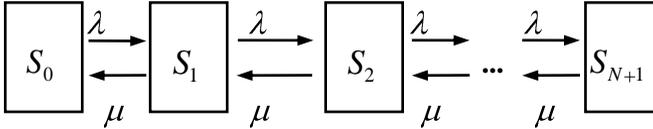


Рис. 1.10. Размеченный граф одноканальной СМО с ограниченной очередью

Конечное состояние в системе определяется максимальным числом мест в очереди плюс 1 канал обслуживания. Введем обозначение  $\lambda/\mu = \rho$ . Система уравнений для нахождения предельных вероятностей  $P_n$  имеет вид:

$$\begin{cases} P_1 = P_0 \frac{\lambda}{\mu} \\ P_2 = \rho P_1 = \rho^2 \cdot P_0 \\ \vdots \\ P_n = \rho P_{n-1} = \rho^n \cdot P_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Учитывая, что  $\sum_{n=0}^{N+1} P_n = 1$ , получим уравнение для определения  $P_0$ :

$$\sum_{n=0}^{N+1} \rho^n P_0 = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{N+1} \rho^n = 1,$$

откуда получим  $P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}}$ , где  $\rho$  – любое, т.е. на отношение

$\lambda/\mu$  не накладывается никаких ограничений.

Вероятности  $P_n = P_0 \cdot \rho^n$ .

Определим среднее число заявок в СМО:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N+1} n \cdot P_n = P_0 \sum_{n=0}^{N+1} n \cdot \rho^n = P_0 \cdot \rho \underbrace{\sum_{n=0}^{N+1} n \rho^{n-1}}_{F'_\rho(\rho)}. \quad (1.20)$$

Обозначим через  $F(\rho) = \sum_{n=0}^{N+1} \rho^n = \frac{1-\rho^{N+2}}{1-\rho}$ , тогда

$$\begin{aligned} F'_\rho &= \frac{(1-\rho^{N+2}) - (1-\rho)(N+2)\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2} = \\ &= \frac{1+(N+1)\rho^{N+2} - (N+2)\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Подставив (1.20) в (1.21), получим:

$$L_s = \frac{(1-\rho)\rho \left[ 1+(N+1)\rho^{N+2} - (N+2)\rho^{N+1} \right]}{(1-\rho^{N+2})(1-\rho)^2}. \quad (1.22)$$

Отметим, что вероятность отказа равна вероятности последнего состояния в размеченном графе:

$$P_{\text{отк}} = P_{N+1} = \rho^{N+1} P_0;$$

$$\lambda_{\text{эфф}} = (1 - P_{\text{отк}}) \cdot \lambda.$$

Используя формулы Литтла (1.1 – 1.3), получим:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{эфф}}}; \quad (1.23)$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}; \quad (1.24)$$

$$L_q = W_q \cdot \lambda_{\text{эфф}}. \quad (1.25)$$

Рассмотрим частный случай, когда  $\lambda = \mu$ , т.е.  $\rho = 1$ . В этом случае  $P_1 = P_0 = P_2 = \dots = P_{N+1}$ :

$$P_0 = \frac{1}{N+2};$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{1}{N+2}.$$

Основные характеристики СМО определяются по следующим формулам:

$$L_s = \frac{N+1}{2};$$

$$\lambda_{\text{эфф}} = \left(1 - \frac{1}{N+2}\right) \cdot \lambda = \lambda \frac{N+1}{N+2};$$

$$W_s = \frac{\overbrace{(N+1)(N+2)}^{N+2}}{2 \underbrace{(N+1)}_{\lambda}} = \frac{N+2}{2\lambda};$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu};$$

$$L_q = \lambda_{\text{эфф}} W_q = \frac{N+1}{2} - \rho \frac{N+1}{N+2}.$$

**СМО с неограниченной очередью.** Так как СМО без отказов, то  $P_{\text{отк}} = 0$ , а  $\lambda_{\text{эфф}} = \lambda$ .

Для получения формул расчета характеристик СМО воспользуемся формулами для СМО с ограниченной очередью.

$$L_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho \left( \overbrace{(+ (N+1) \rho}^{N+2} - \overbrace{(N+2) \rho}^{N+1} \right)}{\left( -\rho^{N+2} \right) \left( -\rho \right)}. \quad (1.26)$$

Чтобы существовал предел, необходимо выполнение условия  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , которое означает, что интенсивность обслуживания должна быть больше интенсивности потока заявок, иначе очередь будет расти до бесконечности.

Отметим, что в СМО с бесконечной очередью

$$P_0 = 1 - \rho. \quad (1.27)$$

Предел (1.26) равен:  $L_s = \frac{\rho}{1 - \rho}$ , и тогда

$$W_s = L_s / \lambda = \frac{\lambda}{\mu \cdot \lambda (1 - \frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu - \lambda}; \quad (1.28)$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}; \quad (1.29)$$

$$L_q = \lambda \cdot W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad (1.30)$$

Рассмотрим вопрос о функции распределения времени пребывания в одноканальной СМО с бесконечной очередью при дисциплине очереди *FIFO*.

Время пребывания в СМО, когда в ней находится  $n$  заявок (система находится в состоянии  $S_n$ , равно сумме длительностей обслуживания  $n$  заявок. Так как время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, то плотность функции распределения условной вероятности времени пребывания в СМО, когда в ней находится  $n$  заявок, определяется так же, как распределение Эрланга  $n$  порядка (см. раздел 1.2.2)

$$f\left(\frac{W_s}{n}\right) = \frac{\mu(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

Искомая плотность функции распределения определяется выражением:

$$f(W_s) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{W_s}{n}\right) \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} \cdot P_n.$$

С учетом (1.19) и (1.27),  $f(W_s)$  запишется в виде:

$$f(W_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} (1-\rho) \cdot \rho^n = \mu(1-\rho) e^{-\mu t} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} \rho^n}_{e^{\mu t} = e^{\lambda t}}$$

$$f(W_s) = \mu(1-\rho) e^{(\lambda-\mu)t} = \mu(1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)t}.$$

Видим, что  $f(W_s)$  – экспоненциальное распределение с математическим ожиданием  $M(W_s) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$ , что совпадает с (1.28).

Из того, что  $f(W_s)$  – экспоненциальное распределение, следует важный вывод: выходной поток заявок в одноканальной СМО с бесконечной очередью является пуассоновским потоком.

### 1.4.2. Многоканальные пуассоновские СМО

#### СМО с ограниченной очередью ( $N > 0$ )

Размеченный граф данного класса СМО представлен на рис. 1.11.

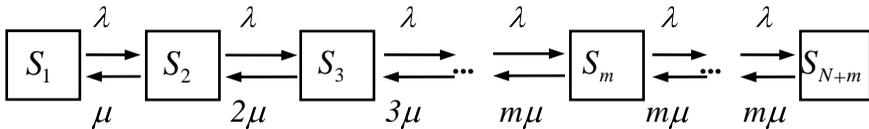


Рис. 1.11. Размеченный граф многоканальной СМО с ограниченной очередью

Составим систему уравнений для определения предельных вероятностей состояний:

$$P_1 = P_0 \lambda / \mu = \rho P_0, \text{ где } \rho = \lambda / \mu$$

$$P_2 = P_1 \cdot \rho / 2 = P_0 \cdot \rho^2 / 2$$

$$P_3 = P_2 \cdot \rho / 3 = \frac{\rho^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} P_0$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, k = 1, \dots, m$$

$$P_{m+1} = P_m \rho / m$$

$$P_{m+2} = P_{m+1} \rho / m = P_m \left( \rho / m \right)^2$$

$$P_0 \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=m}^{N+m} \theta^{n-m} \right] = 1$$

$$\sum_{n=0}^{N+1} \theta^n = \frac{1 - \theta^{N+2}}{1 - \theta}$$

$$P_n = \left( \rho / m \right)^{n-m} P_m, n = m+1, \dots, N+m.$$

Введем обозначение  $\rho / m = \theta$ , тогда

$$P_n = \theta^{n-m} P_m = \theta^{n-m} \frac{\rho^m}{m!} P_0 \quad (n = m, \dots, N+m), \text{ и}$$

$$P_k = P_0 \cdot \frac{\rho^k}{k!} \quad (k = 1, \dots, m-1).$$

Учитывая условие, что сумма всех вероятностей равна единице,

т.е.  $\sum_{k=0}^{m-1} P_k + \sum_{n=m}^{N+m} P_n = 1$ , получим  $P_0$ :

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{1 - \theta^{N+1}}{1 - \theta} \right]^{-1}. \quad (1.31)$$

Определим среднее число заявок в очереди:

$$L_q = \sum_{n=0}^N n P_{n+m} = \sum_{n=0}^N n \theta^n P_m, \text{ где } P_m = P_0 \cdot \frac{\rho^m}{m!};$$

$$L_q = P_m \theta \sum_{n=0}^N n \theta^{n-1}. \quad (1.32)$$

Введем в рассмотрение функцию:

$$G(\theta) = \sum_{n=0}^N \theta^n = \frac{1 - \theta^{N+1}}{1 - \theta};$$

$$G'_\theta = \frac{1 - \theta^{N+1} - (N+1) \theta^N}{1 - \theta} = \frac{1 - (N+1) \theta^N + N \theta^{N+1}}{1 - \theta^2}. \quad (1.33)$$

Подставим (1.33) в (1.32):

$$L_q = \frac{\rho^m}{m!} P_0 \theta \frac{1 + N \theta^{N+1} - (N+1) \theta^N}{1 - \theta^2}. \quad (1.34)$$

Вероятность отказа в обслуживании равна:

$$P_{\text{отк}} = P_{N+m} = \theta^N P_m = \frac{\theta^N \rho^m}{m!} P_0.$$

Эффективный поток заявок:

$$\lambda_{\text{эфф}} = (\lambda - P_{\text{отк}}) \lambda.$$

Используя формулы Литтла, получим среднее время ожидания заявок в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{эфф}}}.$$

Время в СМО отличается от  $W_q$  на время обслуживания:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Наконец среднее число заявок в системе равно:

$$L_s = W_s \cdot \lambda_{\text{эфф}}.$$

Частный случай  $\frac{\lambda}{m\mu} = \theta = 1$ .

Система уравнений для определения  $P_n$  примет вид:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, k = 0, \dots, m;$$

$$P_n = \theta^{n-m} \cdot P_0 = P_m, n = m, \dots, N + m.$$

Определим  $P_0$ :

$$\sum_{n=m+1}^{N+m} P_n = P_m \sum_{n=m+1}^{N+m} \theta^{n-m} = NP_m;$$

$$P_0 = \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m} (N+1) \right)^{-1}.$$

Средняя длина очереди равна:

$$L_q = P_m \sum_{n=0}^N \theta^n \cdot n = \frac{N}{2} (N+1) P_m.$$

Учитывая, что  $P_m = P_0 \frac{\rho^m}{m!}$ , получим:

$$L_q = P_0 \cdot \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{N(N+1)}{2}.$$

**СМО без очереди ( $N=0$ )**

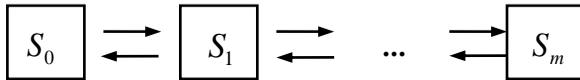


Рис. 1.12. Размеченный граф многоканальной СМО без очереди

Используя (1.31) при  $N = 0$ , получим:

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1}.$$

Вероятность отказа в обслуживании равна:

$$P_{\text{отк}} = P_m = \frac{\rho^m}{m!} P_0.$$

Следовательно,

$$\lambda_{\text{эфф}} = (\lambda - P_{\text{отк}}) = \left(1 - \frac{\rho^m}{m!} P_0\right) \lambda.$$

Предельные вероятности состояний  $S_k$  равны:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Так как очередь отсутствует, среднее время нахождения заявок в СМО равно:

$$W_s = \frac{1}{\mu}. \quad (1.35)$$

Среднее число заявок в СМО равно:

$$L_s = \lambda_{\text{эфф}} \cdot W_s;$$

$$L_s = \frac{1}{\mu} \lambda_{\text{эфф}} = \left(1 - \frac{\rho^m}{m!} P_0\right) \frac{\lambda}{\mu}. \quad (1.36)$$

**СМО с неограниченной очередью ( $N \rightarrow \infty$ )**

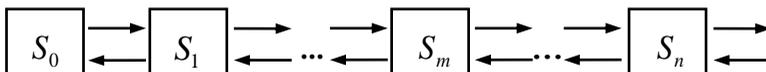


Рис. 1.13. Размеченный граф многоканальной СМО с неограниченной очередью

Для определения характеристик данной СМО воспользуемся формулами для СМО с ограниченной очередью при  $N \rightarrow \infty$ :

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m} \frac{1}{1-\theta} \right]^{-1};$$

$$P_{\text{отк}} = 0; \lambda_{\text{эфф}} = \lambda; P_m = P_0 \frac{\rho^m}{m!};$$

$$L_q = P_0 \frac{\rho^m}{m!} \frac{\theta}{1-\theta^2}; W_q = \frac{L_q}{\lambda}; \quad (1.37)$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}; L_s = \lambda W_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}. \quad (1.38)$$

Чтобы существовал установившийся процесс в СМО, необходимо выполнение условия

$$\frac{\lambda}{\mu \cdot m} = \theta < 1.$$

### 1.4.3. СМО с взаимопомощью каналов

Рассмотрим следующие дисциплины взаимопомощи:

(в) – "все как один" (все каналы обслуживают одну заявку до тех пор, пока не закончат);

(р) – равномерная взаимопомощь (равномерно обслуживаются все заявки, находящиеся в СМО): если в системе одна заявка – ее обслуживают все каналы, если в системе две заявки – все каналы разбиваются на две группы и обслуживают обе заявки и т.д. Особенностью этого вида взаимопомощи является выполнение условия – при наличии в СМО хотя бы одной заявки все каналы заняты.

(б) – СМО без взаимопомощи.

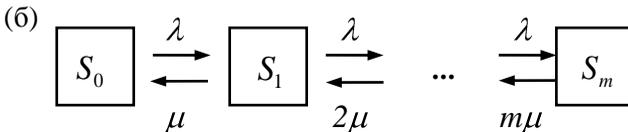
Будем рассматривать случаи, когда при взаимопомощи каналов общая интенсивность обслуживания СМО линейно зависит от числа каналов:

$$\mu_{\text{СМО}} = \mu \cdot m,$$

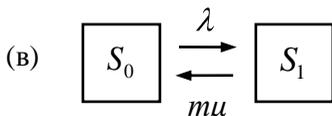
где  $\mu$  – интенсивность обслуживания одного канала.

Рассмотрим основные характеристики СМО:  $L_s, L_q, W_s, W_q, P_{\text{отк}}$  при различных дисциплинах взаимопомощи.

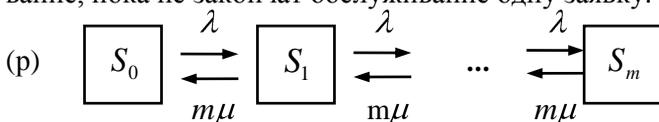
#### СМО без очереди



Для расчета  $L_s^{(б)}, W_s^{(б)}, P_{отк}^{(б)}$  см. формулы (1.35) и (1.36).



Для расчета  $L_s^{(б)}, W_s^{(б)}, P_{отк}^{(б)}$  см. формулы (1.17) и (1.18) с заменой  $\mu$  на  $m\mu$ . Всего два состояния, так как каналы не прерывают обслуживание, пока не закончат обслуживание одну заявку.



Для расчета  $L_s^{(п)}, W_s^{(п)}, P_{отк}^{(п)}$  см. формулы (1.22 – 1.25) с заменой  $N$  на  $m-1$ , и  $\mu$  на  $m\mu$ .

*Сравним характеристики:*

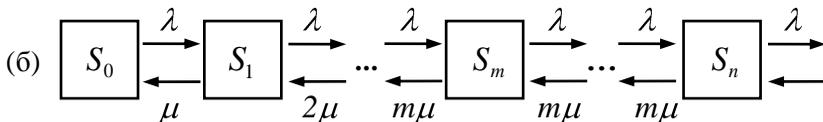
$$P_{отк}^{(б)} > P_{отк}^{(б)} > P_{отк}^{(п)};$$

$$L_s^{(б)} < L_s^{(б)} < L_s^{(п)};$$

$$L_q, W_q = 0;$$

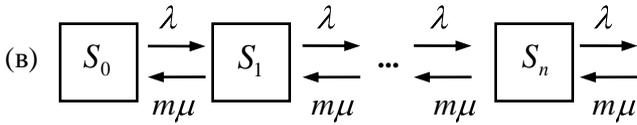
$$W_s^{(б)} = \frac{1}{m\mu} < W_s^{(п)} < W_s^{(б)}.$$

### СМО с неограниченной очередью

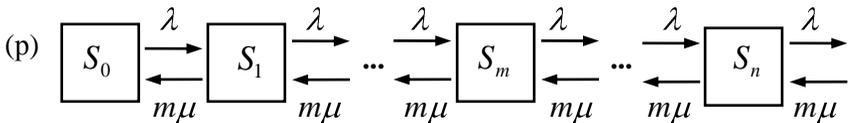


Очередь начинается после состояния  $S_m$ .

Для расчета  $L_s^{(б)}, W_s^{(б)}, L_q^{(б)}, W_q^{(б)}$  см. формулы (1.37) и (1.38).



Очередь начинается после состояния  $S_1$



Очередь начинается после состояния  $S_m$ .

Отметим, что размеченные графы для обеих дисциплин взаимопомощи одинаковые, из чего следует, что предельные вероятности

состояний  $P_i = P_0 \cdot \left( \frac{\lambda}{m\mu} \right)^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) одинаковые. Это означает,

что  $L_s$  и  $W_s$  равны для равномерной и "все как один" дисциплин взаимопомощи. Для их расчета следует использовать формулы одноканальной СМО с неограниченной очередью, заменив в них  $\mu$  на  $m\mu$ .

Для расчета  $L_q^{(b)}, W_q^{(b)}$  следует использовать формулы одноканальной СМО с неограниченной очередью, заменив в них  $\mu$  на  $m\mu$ . Отметим, что  $L_q^{(a)} = \theta \cdot L_s^{(a)}$ .

Средняя длина очереди для равномерной дисциплины взаимопомощи определяется выражением:  $L_q^{(d)} = \theta^m \cdot L_s^{(p)}$ .

*Сравним характеристики СМО:*

$$P_{отк} = 0;$$

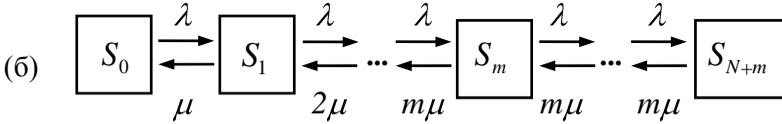
$$L_s^{(b)} > L_s^{(a)} = L_s^{(p)};$$

$$L_q^{(b)} > L_q^{(a)} > L_q^{(p)};$$

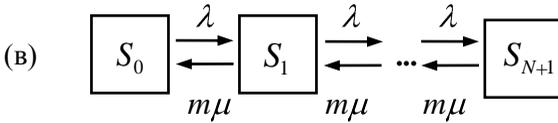
$$W_s^{(6)} > W_s^{(b)} = W_s^{(p)};$$

$$W_q^{(6)} > W_q^{(b)} > W_q^{(p)}.$$

### СМО с ограниченной очередью

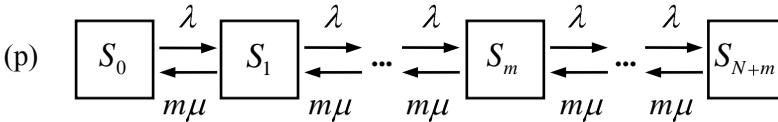


Для расчета  $L_q^{(6)}$  см. формулу (1.34), а для  $L_s^{(6)}, W_s^{(6)}, W_q^{(6)}, P_{отк}^{(6)}$  – формулы в том же пункте.



Очередь начинается после состояния  $S_1$ .

Для расчета  $L_s^{(b)}, W_s^{(b)}, L_q^{(b)}, W_q^{(b)}, P_{отк}^{(b)}$  см. формулы (1.22 – 1.25) с заменой  $\mu$  на  $m\mu$ .



Очередь начинается после состояния  $S_m$ .

Для расчета  $L_s^{(p)}, W_s^{(p)}, P_{отк}^{(p)}, P_0$  см. формулы (1.22 – 1.25) с заменой  $\mu$  на  $m\mu$  и  $N$  на  $N+m-1$ . Средняя длина очереди равна:

$$L_q = \sum_{n=1}^N n P_{m+n} = P_m \theta \sum_{n=1}^N n \theta^{n-1} = P_0 \theta^{m+1} \sum_{n=1}^N n \theta^{n-1}.$$

Для получения окончательной формулы см. (1.32) и (1.33):

$$L_q = P_0 \theta^{m+1} \frac{1 + N\theta^{N+1} - N + 1 \theta^N}{1 - \theta^2}.$$

Сравним характеристики СМО:

$$P_{\text{отк}}^{(в)} > P_{\text{отк}}^{(б)} > P_{\text{отк}}^{(р)}; L_s^{(р)} > L_s^{(б)} > L_s^{(в)}.$$

Что касается других характеристик, можно указать только соотношения между некоторыми из них:

$$L_q^{(б)} > L_q^{(р)}; W_s^{(б)} > W_s^{(р)}; W_q^{(б)} > W_q^{(р)}.$$

Равномерная взаимопомощь (р) наиболее эффективная из всех, а про взаимопомощь «все как один» (в) ничего определенного сказать нельзя, так как все зависит от соотношения  $\lambda, \mu, m, N$ .

#### 1.4.4. СМО самообслуживания

Системы, в которых нет отказа и отсутствует очередь, называются СМО самообслуживания. Такие требования к СМО будут выполняться, если в СМО число каналов будет стремиться к бесконечности.

Размеченный граф такой СМО представлен на рис. 1.14.

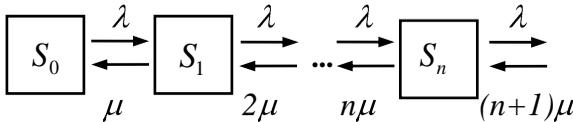


Рис. 1.14. Размеченный граф СМО самообслуживания

Для анализа СМО самообслуживания достаточно использовать формулы Литтла. Так как СМО без потерь, то  $\lambda_{\text{эфф}} = \lambda$ , а  $L_q = W_q = 0$ , остальные характеристики СМО равны:

$$W_s = \tau = \frac{1}{\mu}, \quad L_s = \lambda \cdot \tau = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Определим вероятность состояния  $S_0$  – вероятность того, что система будет свободна:

$$P_n = P_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \Rightarrow P_0 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1} = e^{-\rho}.$$

Так как формулы Литтла справедливы для СМО с произвольными потоками заявок и временем обслуживания, то формулы для  $W_s$  и  $L_s$  тоже справедливы для СМО самообслуживания с произвольными потоками заявок и временем обслуживания. В то же время, при выводе формулы для  $P_0$  использованы процессы гибели и размножения, поэтому полученное выражение справедливо только для пуассоновских СМО самообслуживания.

### 1.4.5. Замкнутые СМО

Чтобы представить этот класс СМО, рассмотрим ее пример. Пусть есть  $n$  станков – источники заявок, каждый из которых выходит из строя с интенсивностью  $\lambda$ . Для обслуживания выходящих из строя станков имеются каналы обслуживания. Если число каналов  $m = 1$ , то замкнутая система одноканальная, если  $m > 1$ , то замкнутая система многоканальная.

#### Одноканальные замкнутые СМО

Размеченный граф для такой системы имеет вид:

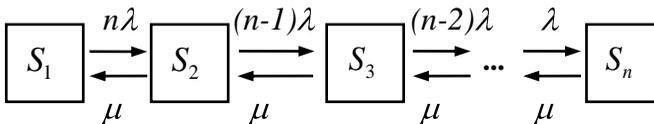


Рис. 1.15. Размеченный граф одноканальной замкнутой СМО

Составим систему уравнений для определения предельных вероятностей:

$$P_1 = \frac{n\lambda}{\mu} P_0 = n\rho P_0;$$

$$P_2 = (n-1)\rho P_1 = n(n-1)\rho^2 P_0;$$

. . .

$$P_k = n(n-1)\dots(n-k+1)\rho^k P_0 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

или

$$P_k = \frac{n!}{(n-k)!} \rho^k P_0 \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \rho^k = 1 \quad ,$$

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \rho^k \right]^{-1} - \text{вероятность того, что все станки рабо-}$$

тают, а аппарат обслуживания простаивает.

$$L_s = \sum_{k=0}^n k P_k .$$

Определим  $L_s$  исходя из особенности одноканальной замкнутой СМО. Если система находится в равновесии, то общая эффективная интенсивность обслуживания и эффективный поток заявок должны быть равны:

$$\mu_{\text{эфф}} = \lambda_{\text{эфф}} .$$

Эффективный поток заявок определяется выражением:  $\lambda_{\text{эфф}} = (n - L_s)\lambda$ , а эффективная интенсивность обслуживания:

$$\mu_{\text{эфф}} = (1 - P_0)\mu .$$

Получаем уравнение для определения  $L_s$  :

$$(1 - P_0)\mu = (n - L_s)\lambda ;$$

$$L_s = n - \frac{(1 - P_0)\mu}{\lambda} = n - \frac{(1 - P_0)}{\rho} , \text{ где } \rho = \frac{\lambda}{\mu} .$$

Остальные характеристики определяются по следующим формулам:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{эфф}}} = \frac{L_s}{(n-L_s)\lambda};$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu};$$

$$L_q = \lambda_{\text{эфф}} W_q;$$

$$L_q = W_s \lambda_{\text{эфф}} - \frac{\lambda_{\text{эфф}}}{\mu} = L_s - \frac{\lambda_{\text{эфф}}}{\mu};$$

$$L_q = L_s - \frac{(n-L_s)\lambda}{\mu} = L_s(1+\rho) - n\rho;$$

$$\begin{aligned} L_q &= \left[ n - \frac{1-P_0}{\rho} \right] (1+\rho) - n\rho = n\rho - (1-P_0) + \left[ n - \frac{1-P_0}{\rho} \right] - n\rho = \\ &= n\rho - \left( -P_0 \left( \frac{\rho+1}{\rho} \right) \right). \end{aligned}$$

### Многоканальные замкнутые СМО

Размеченный граф данного класса СМО приведен на рис. 1.16 ( $m < n$ ).

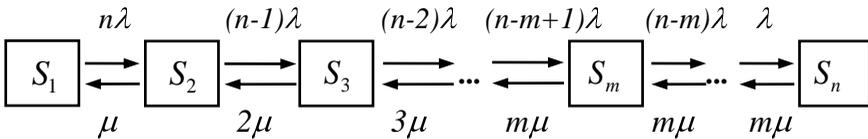


Рис. 1.16. Размеченный граф многоканальной замкнутой СМО

Определим предельные вероятности состояний системы.

$$P_k = \frac{n! \rho^k}{(n-k)! k!} P_0 \quad (k = 1, \dots, m);$$

$$P_m = \frac{n! \rho^m}{(n-m)! m!} P_0;$$

$$P_{m+1} = \frac{(n-m)\rho}{m} P_m;$$

$$P_{m+2} = \frac{(n-m)(n-m+1)\rho^2}{m^2} P_m;$$

$$P_s = \frac{(n-m)! \rho^{s-m}}{(n-s)! m^{s-m}} P_m \quad (s = m+1, \dots, n).$$

После упрощения  $P_m$  получим:

$$P_0 = \left[ 1 + \sum_{k=1}^m \frac{n! \rho^k}{(n-k)! k!} + \frac{n!}{m!} \sum_{s=m+1}^n \frac{\rho^s}{(n-s)! m^{s-m}} \right]^{-1};$$

$$L_s = \sum_{k=0}^n k P_k;$$

$$\lambda_{\text{эфф}} = (n - L_s) \lambda;$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{эфф}}};$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu};$$

$$L_q = W_q \lambda_{\text{эфф}}.$$

В частном случае, когда  $m = n$  и  $\lambda < \mu$ , СМО распадается на  $m$  одноканальных, т.е. за каждым каналом закрепляется один источник заявок (станок).

Для отдельного канала и всей СМО в целом выполняется:

$$W_s = \frac{1}{\mu}.$$

Загруженность отдельного канала  $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ , а число заявок в системе  $L_s = n\rho$ . Кроме того, в данной СМО  $L_q = 0$  и  $W_q = 0$ .

### 1.4.6. Многофазные СМО

Многофазные СМО представляют собой обслуживание заявок последовательно в нескольких СМО (фаз). Поток заявок поступает на СМО<sub>1</sub>.

#### Многофазные СМО без потерь



Каждая  $i$ -я СМО имеет характеристику  $\mu_i$ , и у всех очереди бесконечные.

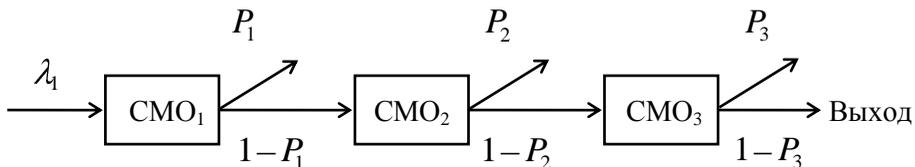
СМО без потерь означает, что все заявки проходят все фазы, т.е.  $\lambda_i = \lambda_1, i = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим случай, когда все СМО <sub>$i$</sub>  – одноканальные. Имея данные для каждого СМО <sub>$i$</sub>  –  $\lambda_i, \mu_i$ , можно рассчитать характеристики  $L_{s_i}, L_{q_i}, W_{s_i}, W_{q_i}$ .

Характеристики многофазной СМО рассчитываются в соответствии со следующими выражениями:

$$L_s = \sum_{i=1}^n L_{s_i}; \quad L_q = \sum_{i=1}^n L_{q_i}; \quad W_s = \sum_{i=1}^n W_{s_i}; \quad W_q = \sum_{i=1}^n W_{q_i}.$$

#### Многофазные СМО с потерями

В данном классе многофазных СМО после каждой фазы обслуживания заявки с вероятностью  $P_i$  не обслуживаются на следующих фазах (происходит потеря заявок).



Потоки заявок, поступающие на обслуживание в каждую СМО<sub>*i*</sub>, определяются следующим образом:

$$\lambda_2 = (1 - P_1)\lambda_1;$$

$$\lambda_3 = (1 - P_2)\lambda_2 = (1 - P_1)(1 - P_2)\lambda_1;$$

·  
·  
·

$$\lambda_n = \lambda_1 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - P_i).$$

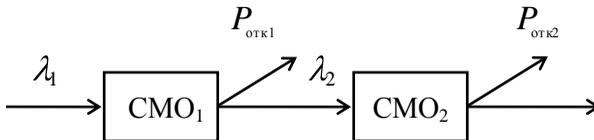
На выходе такой многофазной СМО поток обработанных заявок на всех фазах равен:

$$\lambda_{\text{вых}} = \lambda_1 \prod_{i=1}^n (1 - P_i).$$

Рассматривая случай, когда для всех фаз очередь бесконечная и  $m = 1$ , можем рассчитать характеристики СМО<sub>*i*</sub>, а затем – характеристики многофазной СМО так же, как в многофазной без потерь.

### Многофазные СМО без очереди

В данном классе СМО для всех фаз  $N_i = 0$ . Подход к анализу таких СМО продемонстрируем на двухфазной системе:



Выделим две разновидности систем, каждая из которых отличается процессом функционирования.

#### *Двухфазная СМО без блокировки фаз*

Возможные состояния данной двухфазной СМО:

$S_{00}$  – обе фазы свободны;  
 $S_{10}$  – первая занята, вторая свободна;  
 $S_{01}$  – первая свободна, вторая занята;  
 $S_{11}$  – обе заняты.

Размеченный граф такой СМО представлен на рис. 1.17, на котором  $\mu_1$  – интенсивность обслуживания в СМО<sub>1</sub>, а  $\mu_2$  – в СМО<sub>2</sub>.

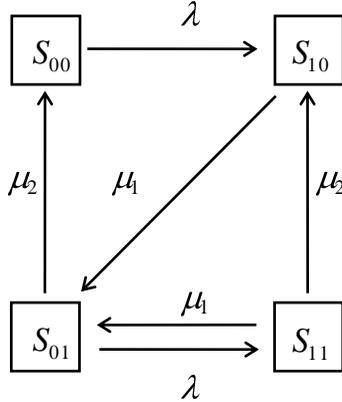


Рис. 1.17. Размеченный граф двухфазной СМО без блокировки

Составим систему уравнений для нахождения предельных вероятностей:

$$P_{00} \cdot \lambda = P_{01} \cdot \mu_2 \quad (1.39)$$

$$P_{10} \cdot \mu_1 = P_{00} \cdot \lambda + P_{11} \cdot \mu_2 \quad (1.40)$$

$$P_{01} \cdot (\lambda + \mu_2) = P_{10} \cdot \mu_1 + P_{11} \cdot \mu_1 \quad (1.41)$$

$$P_{11} \cdot (\mu_1 + \mu_2) = P_{01} \cdot \lambda. \quad (1.42)$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\text{из (1.39): } P_{01} = \frac{\lambda}{\mu_2} P_{00};$$

$$\text{из (1.42): } P_{11} = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} P_{01} = \frac{\lambda}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} P_{00};$$

$$\text{из (1.40): } P_{10} = \frac{\lambda}{\mu_1} P_{00} + \frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)} P_{00}.$$

$P_{00}$  определим из условия, что сумма всех вероятностей равна единице:

$$P_{00} \left[ 1 + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda^2}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)} + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)} \right] = 1.$$

Перейдем к расчету характеристик двухфазной СМО:

$$L_s = 0 \cdot P_{00} + 1 \cdot (P_{10} + P_{01}) + 2P_{11};$$

$$L_q = 0; W_q = 0.$$

Вероятность отказа на первой фазе:

$$P_{\text{отк1}} = P_{10} + P_{11};$$

$$\lambda_{\text{отк1}} = P_{\text{отк1}} \cdot \lambda.$$

$$\text{Поэтому } \lambda_2 = (1 - P_{\text{отк1}}) \cdot \lambda = (P_{00} + P_{01}) \cdot \lambda.$$

На второй фазе получают отказ заявки, которые поступают после первой фазы в то время, когда вторая фаза занята:

$$\lambda_{\text{отк2}} = \frac{P_{11} \cdot \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \lambda_2 = \frac{P_{11}(P_{00} + P_{01})\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \lambda;$$

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda - \lambda_{\text{отк1}} - \lambda_{\text{отк2}} = (P_{00} + P_{01}) \left[ 1 - P_{11} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right] \cdot \lambda;$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{эфф}}}.$$

### ***Двухфазная СМО с блокировкой первой фазы***

Состояния системы:

$S_{00}$  – обе фазы свободны;

$S_{10}$  – первая занята, вторая свободна;

$S_{01}$  – первая свободна, вторая занята;

$S_{11}$  – обе заняты;

$S_{01}$  – блокировка первой фазы. В это состояние система переходит в случае, когда заявка обслужена на первой фазе, но вторая фаза в этот момент занята. Заявка остается на первой фазе, тем самым блокирует поступление следующей заявки на первую фазу.

Размеченный граф такой СМО имеет вид:

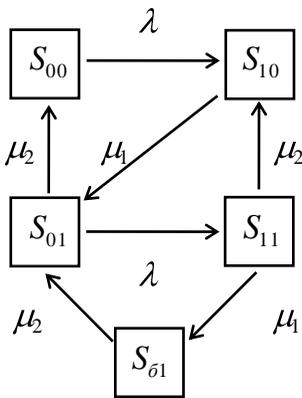


Рис. 1.18. Размеченный граф двухфазной СМО с блокировкой

Составим и решим систему уравнений для определения предельных вероятностей:

$$P_{00} \cdot \lambda = P_{01} \cdot \mu_2 \Rightarrow P_{01} = \frac{\lambda}{\mu_2} P_{00};$$

$$P_{10} \cdot \mu_1 = P_{00} \cdot \lambda + P_{11} \cdot \mu_2 \Rightarrow P_{10} = P_{00} \left[ \lambda + \frac{\lambda^2}{\mu_1 + \mu_2} \right];$$

$$P_{01} \cdot (\lambda + \mu_2) = P_{10} \cdot \mu_1 + P_{01} \cdot \mu_2;$$

$$P_{11} \cdot (\mu_1 + \mu_2) = P_{01} \cdot \lambda \Rightarrow P_{11} = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} P_{01} = \frac{\lambda^2}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)} P_{00};$$

$$P_{01} \cdot \mu_2 = P_{11} \cdot \mu_1 \Rightarrow P_{01} = \frac{\mu_1}{\mu_2} P_{11} = \frac{\mu_1 \lambda^2}{\mu_2^2(\mu_1 + \mu_2)} P_{00}.$$

Используя нормирующее условие

$$P_{00} + P_{10} + P_{01} + P_{11} + P_{\bar{0}1} = 1,$$

определим  $P_{00}$  и все остальные вероятности.

Характеристики СМО будут вычисляться в следующей последовательности.

$$P_{\text{отк}} = P_{10} + P_{11} + P_{\bar{0}1}; \quad L_s = P_{10} + P_{01} + 2(P_{11} + P_{\bar{0}1});$$

$$\lambda_{\text{эфф}} = (P_{00} + P_{01}) \cdot \lambda; \quad W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{эфф}}}; \quad L_q = P_{\bar{0}1}; \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{эфф}}}.$$

Рассмотренный подход к анализу двухфазной СМО можно распространить на большее число фаз. На рис. 1.19 представлен размеченный граф трехфазной СМО с отказами без блокировки фаз:

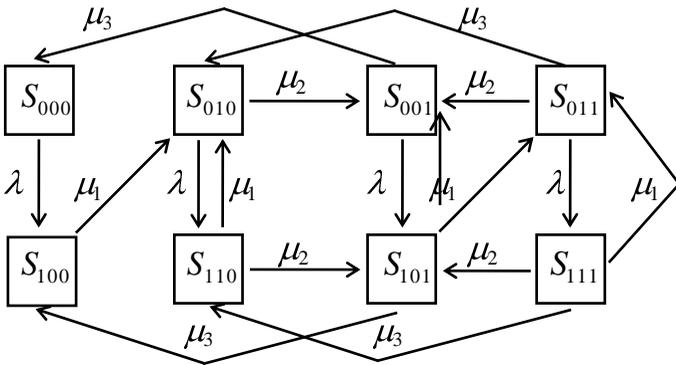


Рис. 1.19. Размеченный граф трехфазной СМО без блокировки

### 1.5. Пуассоновские сети СМО

Сети СМО представляют собой множество СМО (узлы сети), при этом заявки обслуживаются в нескольких узлах. Последовательность прохождения заявок в сети определяется вероятностями перехода заявок от одного узла к другому.

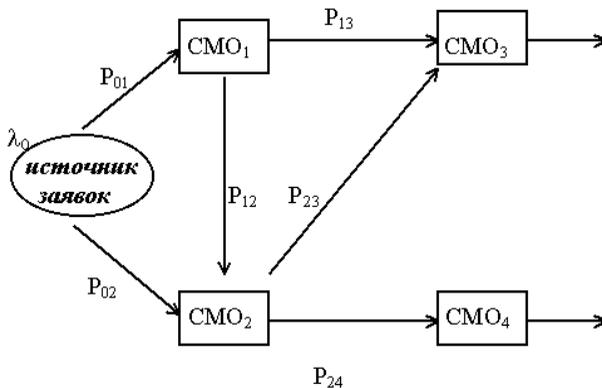


Рис. 1.20. Топология сети СМО

Будем рассматривать пуассоновские сети СМО, т.е. из источника поступает пуассоновский поток заявок, а время обслуживания в каждом узле  $i$  распределено по экспоненциальному закону:

$$\varphi_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_i e^{-\mu_i t}.$$

СМО в каждом узле – одноканальная с бесконечной очередью. Для этого класса СМО выходной поток является пуассоновским (см. п.1.3.1).

Учитывая свойства и операции с пуассоновскими потоками (суперпозиция потоков и их случайное просеивание), можно сделать вывод, что входной поток в СМО в каждом узле является пуассоновским.

Анализ сетей СМО заключается в расчете потоков заявок в каждом узле. После чего рассчитываются характеристики СМО в каждом узле  $L_{si}, W_{si}, L_{qi}, W_{qi}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а затем характеристики сети СМО в целом:  $L_s, W_s, L_q, W_q$ .

### 1.5.1. Ациклические сети СМО

В ациклических сетях каждая заявка может посетить узел не более одного раза (заявка может посетить узел или нет). Это условие означает, что матрица переходов будет иметь следующий вид:

$$\|P_{ij}\|: \begin{vmatrix} 0 & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ 0 & 0 & P_{23} & P_{24} \\ 0 & 0 & 0 & P_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассчитаем величины входных потоков в каждый узел (нагрузку на СМО):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= P_{01}\lambda_0 \\ \lambda_2 &= P_{02}\lambda_0 + P_{12}\lambda_1 \\ &\vdots \\ \lambda_i &= \sum_{j=0}^{i-1} P_{ji}\lambda_j. \end{aligned}$$

Характеристики каждого узла  $L_{si}, W_{si}, L_{qi}, W_{qi}$  рассчитываются как для одноканальной СМО:

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{i=1}^n L_{si}; L_q = \sum_{i=1}^n L_{qi}, \\ W_s &= \sum_{i=1}^n \alpha_i W_{si}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$  – вероятность посещения произвольной заявки СМО  $i$ .

Среднее время ожидания заявок в очередях сети определяется также как среднее время пребывания в сети:

$$W_q = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_{qi}.$$

Рассмотрим случай, когда имеется в сети не один, а несколько источников с входными пуассоновскими потоками  $\lambda_0^{(\kappa)}$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots, m$ . В этом случае должны быть также заданы матрицы вероятностей переходов между узлами для каждого из входных потоков  $\lambda_0^{(\kappa)} - \|P_{ij}^{(\kappa)}\|$ .

Тогда нагрузка на узел  $i$  из всех источников будет определяться по формуле:

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^m \lambda_i^{(k)},$$

где  $\lambda_i^{(k)}$  – поток заявок в  $i$  - узел, поступающий из  $k$  - источника, который рассчитывается на основании  $\lambda_0^{(k)}$  и  $\|P_{ij}^{(k)}\|$ .

Рассчитав  $\lambda_i$  и зная  $\mu_i$ , можно определить характеристики СМО  $i$  (каждого узла)  $L_{si}, W_{si}, L_{qi}, W_{qi}$ .

Расчет характеристик сети относительно каждого источника ведется по следующим формулам:

$$W_s^{(k)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} W_{si};$$

$$W_q^{(k)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} W_{qi}, \text{ где } \alpha_i^{(k)} = \frac{\lambda_i^{(k)}}{\lambda_0^{(k)}};$$

$$L_s^{(k)} = \sum_{i=1}^n L_{si} \cdot \frac{\lambda_i^{(k)}}{\lambda_i};$$

$$L_q^{(k)} = \sum_{i=1}^n L_{qi} \cdot \frac{\lambda_i^{(k)}}{\lambda_i}.$$

Для определения  $L_s$  и  $L_q$  по всем источникам вместе  $L_s^{(k)}$  и  $L_q^{(k)}$  суммируется, а время пребывания произвольной заявки в сети рассматривается по формуле:

$$W_s = \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_0^{(k)}}{\lambda_0} W_s^{(k)}, \text{ где } \lambda_0 = \sum_{k=1}^m \lambda_0^{(k)}.$$

Аналогично рассчитывается среднее время ожидания заявок во всех очередях сети:

$$W_q = \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_0^{(k)}}{\lambda_0} W_q^{(k)}.$$

### 1.5.2. Циклические сети СМО

В циклических сетях заявка может посетить один узел неоднократно. Пример такой сети приведен на рис. 1.21.

Для анализа циклических сетей совместим "выход" и "источник". Матрица переходов для циклических сетей  $\|P_{ij}\|$  произвольная.

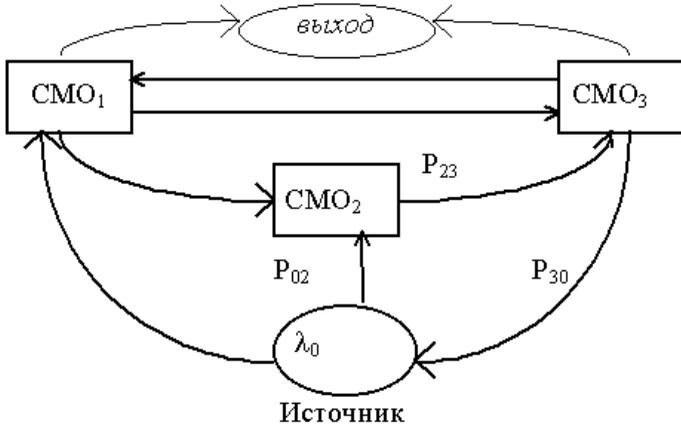


Рис. 1.21. Топология циклической сети СМО

Рассматривая процесс перехода заявки от узла к узлу как марковский процесс, рассчитаем предельные вероятности нахождения заявки в каждом узле. Для этого решим следующее векторное уравнение (см. раздел 1.3).

$$\bar{P} = \bar{P} \|P_{ij}\|;$$

$$\bar{P} = \bar{P}_0, P_1, \dots, P_n$$

Отношение  $P_i$  к  $P_0$  можно интерпретировать как частоту посещения заявки узла  $i$  (СМО <sub>$i$</sub> ), вышедшей из источника:

$$\alpha_i = \frac{P_i}{P_0}.$$

Тогда входной поток в узел  $i$  будет определяться по формуле:

$$\lambda_i = \alpha_i \lambda_0.$$

Зная интенсивность обслуживания в каждом узле  $\mu_i$ , рассчитаем характеристики по каждому узлу  $L_{si}, W_{si}, L_{qi}, W_{qi}$ .

Расчет характеристик сети в целом ведется так же, как и в ациклических сетях.

$$L_s = \sum_{i=1}^n L_{si}; \quad L_q = \sum_{i=1}^n L_{qi};$$

$$W_s = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_{si}; \quad W_q = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_{qi}.$$

Анализ циклических сетей СМО с несколькими источниками производится аналогично ациклическим сетям.

*Пример расчета циклической сети СМО.*

Задана матрица переходов  $\|P_{ij}\|$ :

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Входной поток  $\lambda_0 = 10$  и интенсивности обслуживания заявок в узлах:  $\mu_1 = 50, \mu_2 = 30, \mu_3 = 40$ .

Находим предельные вероятности, решая систему уравнений:

$$P_0 = 0,5P_2 + 0,7P_3$$

$$P_1 = 0,5P_0 + 0,3P_3$$

$$P_3 = 0,7P_1 + 0,5P_2$$

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{9}; \quad P_1 = \frac{4}{9}; \quad P_2 = \frac{2}{9}; \quad P_3 = \frac{2}{9}.$$

Далее рассчитываем:

$$\alpha_1 = \frac{P_1}{P_0} = 4; \quad \alpha_2 = \frac{P_2}{P_0} = 2; \quad \alpha_3 = \frac{P_3}{P_0} = 2.$$

Входные потоки заявок на каждый узел будут равны:

$$\lambda_1 = \alpha_1 \cdot \lambda_0 = 40; \quad \lambda_2 = \alpha_2 \lambda_0 = 20; \quad \lambda_3 = \alpha_3 \lambda_0 = 20.$$

Рассчитаем характеристики СМО в каждом узле:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho};$$
$$L_{s1} = \frac{0,8}{1-0,8} = 4; \quad L_{s2} = \frac{2}{3\left(1-\frac{2}{3}\right)} = 2; \quad L_{s3} = \frac{0,5}{1-0,5} = 1;$$

$$W_{si} = \frac{L_{si}}{\lambda_i};$$

$$W_{s1} = \frac{4}{40} = 0,1; \quad W_{s2} = \frac{2}{20} = 0,1; \quad W_{s3} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Интегральные характеристики по сети будут равны:

$$L_s = 4 + 2 + 1 = 7; \quad W_s = 0,1 \cdot 4 + 0,1 \cdot 2 + 0,05 \cdot 2 = 0,7.$$

### 1.6. Непуассоновские СМО

Для анализа непуассоновских СМО следует использовать имитационное моделирование. Вопросы имитационного моделирования рассматриваются во множестве пособий и учебников, см., например, [4,5]. Вместе с тем, для некоторых классов непуассоновских СМО можно произвести аналитические расчеты характеристик. Это СМО, в которых входной поток непуассоновский, или время обслуживания – не экспоненциальное распределение. В данном разделе будут рассмотрены именно такие СМО.

### 1.6.1. Анализ непуассоновских СМО методом Эрланга

Суть этого метода заключается в аппроксимации непуассоновского потока потоком Эрланга  $k$ -го порядка.

#### а) СМО с произвольным законом времени обслуживания

Класс СМО  $\langle \lambda e^{-\lambda t}, \varphi(t), m=1, N=0 \rangle$ , где  $\varphi(t)$  – произвольная функция распределения.

Определив по  $\varphi(t)$  математическое ожидание и дисперсию времени обслуживания  $\varphi(t)$ , аппроксимируем распределением Эрланга

$k$ -го порядка (см. раздел 1.2)  $k = \frac{M^2 D}{D^2}$ . Вопросы анализа таких

СМО рассмотрим последовательно по мере усложнения для Эрланга 2-го, 3-го и т.д. порядка.

Пусть время обслуживания распределено в соответствии с законом Эрланга 2-го порядка:  $\varphi(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$  (т.е. в пуассоновском потоке вычеркивается каждый второй элемент  $\mu_s = \mu/2$ ).

Процесс обслуживания будем представлять как последовательность двух этапов, на каждом из которых обслуживание ведется по экспоненциальному закону с  $\mu = 2\mu_s$ .

Размеченный граф такой СМО приведен на рис. 1.22.

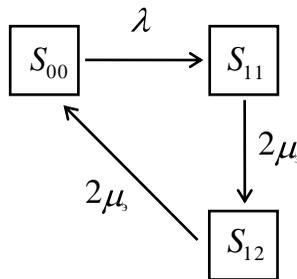


Рис. 1.22. Размеченный граф одноканальной СМО без очереди и временем обслуживания Эрланга 2-го порядка

Состояния СМО:  $S_{00}$  – в системе нет заявок;  $S_{11}$  – в системе одна заявка и обслуживается на первом этапе;  $S_{12}$  – в системе одна заявка и проходит второй этап обслуживания.

Найдем предельные вероятности:

$$\begin{cases} P_{00}\lambda = P_{11}2\mu_3 \rightarrow P_{11} = \frac{\lambda}{2\mu_3} P_{00}; \\ P_{11}2\mu_3 = P_{12}2\mu_3 \rightarrow P_{11} = P_{12}; \\ P_{00} + P_{11} + P_{12} = 1 \end{cases}$$

$$P_{00} = \frac{1}{\frac{\lambda}{2\mu_3} + \frac{\lambda}{2\mu_3} + 1} = \frac{\mu_3}{\lambda + \mu_3}; \quad P_{11} = P_{12} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu_3)};$$

$$\lambda_{\text{эфф}} = P_{00} \cdot \lambda; \quad P_{\text{отк}} = P_{11} + P_{12} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_3};$$

$$L_s = P_{11} + P_{12} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_3}; \quad W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{эфф}}} = \frac{1}{\mu_3}.$$

Рассмотрим СМО, в которой  $\varphi(\cdot)$  – распределение Эрланга третьего порядка:

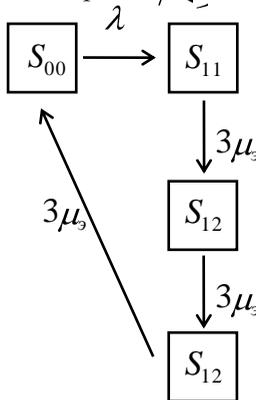


Рис. 1.23. Размеченный граф СМО с временем обслуживания Эрланга третьего порядка

После решения системы уравнений получим предельные вероятности:

$$P_{00} = \frac{\mu_3}{\lambda + \mu_3};$$

$$P_{11} = P_{12} = P_{13} = \frac{\lambda}{3(\lambda + \mu_3)};$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_3}.$$

Получаем те же самые формулы, что и для СМО с  $\varphi(t)$  – Эрланга второго порядка.

Следовательно, для одноканальных систем без очереди для закона Эрланга любого порядка получаем одни и те же формулы.

Рассмотрим СМО с ограниченной очередью:  $\langle \lambda e^{-\lambda t}, \varphi(t), 1, N = 3 \rangle$ , где  $\varphi(t) = (2\mu_3)^2 t e^{-2\mu_3 t}$  – распределение Эрланга второго порядка. Размеченный граф такой СМО приведен на рис. 1.24:

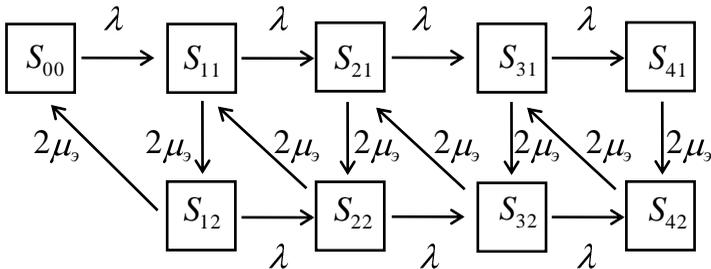


Рис. 1.24. Размеченный граф одноканальной СМО с ограниченной очередью и временем обслуживания Эрланга 2-го порядка

Состояния системы:

$S_{i1}$  – число заявок в СМО –  $i$ , и заявка обслуживается на первом этапе;

$S_{i2}$  – заявка проходит обслуживание на втором этапе.

Если  $\varphi(t)$  – закон Эрланга третьего порядка, т.е.

$$\varphi(t) = (3\mu_3)^3 \frac{t^2}{2} e^{-2\mu_3 t},$$

то надо добавить еще один ярус в размеченный граф:

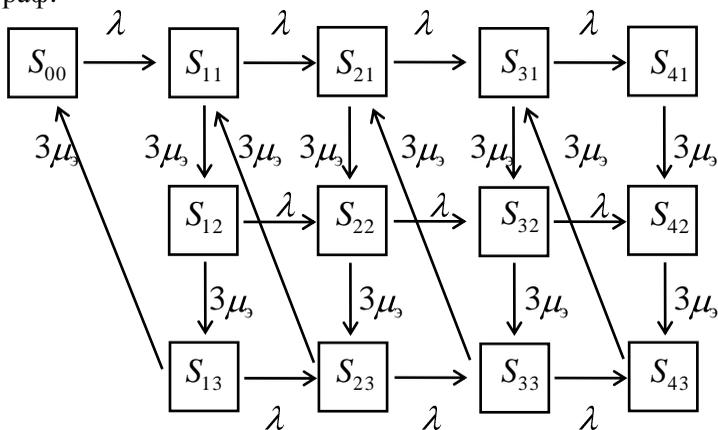


Рис. 1.25. Размеченный граф одноканальной СМО с ограниченной очередью и временем обслуживания Эрланга третьего порядка

Не составляет трудностей построить размеченный граф и для многоканальных СМО для времени обслуживания распределенном по закону Эрланга  $k$  – порядка, чтобы получить предельные вероятности и затем характеристики СМО.

### б) СМО с произвольным входным потоком

Класс СМО  $\langle f, \mu, m=1, N=0 \rangle$ , где  $f(t)$  – произвольное распределение. Аппроксимируем  $f(t)$  распределением Эрланга  $k$  – го порядка.

Рассмотрим сначала СМО, в которой  $f(t) = (2\lambda_3)^2 t e^{-2\lambda_3 t}$  – распределение Эрланга второго порядка.

В данных СМО интервал времени между заявками представим в виде двух этапов, каждый из которых распределен по экспоненциальному закону с  $\lambda = 2\lambda_3$ . Состояния системы будут иметь двойной индекс.

$S_{i1}$  – в системе  $i$  заявок, и формирование заявки проходит первый этап.

$S_{i2}$  – формирование заявки проходит второй этап.

Размеченный граф такой СМО приведен на рис. 1.26 :

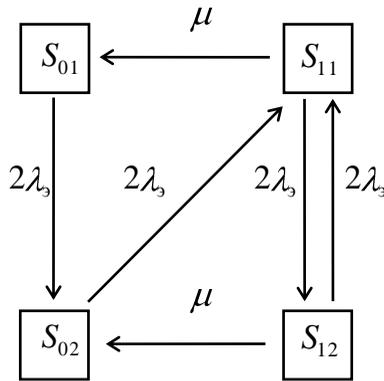


Рис. 1.26. Размеченный граф одноканальной СМО без очереди с входным потоком Эрланга второго порядка

Обозначим  $\lambda_3$  через  $\lambda$ , получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{01} \cdot 2\lambda = P_{11}\mu \rightarrow P_{01} = \frac{\mu}{2\lambda} P_{11} \\ P_{02} \cdot 2\lambda = P_{01} \cdot 2\lambda + P_{12} \cdot \mu \rightarrow P_{02} = P_{11} \frac{\mu^2 + 4\mu\lambda}{2\lambda(\mu + 2\lambda)} \\ P_{11}(\mu + 2\lambda) = P_{02} \cdot 2\lambda + P_{12} \cdot 2\lambda \\ P_{12}(\mu + 2\lambda) = P_{11} \cdot 2\lambda \rightarrow P_{12} = \frac{2\lambda}{\mu + 2\lambda} P_{11} \end{array} \right.$$

Составим уравнение для нахождения  $P_{11}$ :

$$P_{01} + P_{02} + P_{11} + P_{12} = 1$$

$$P_{11} \left[ 1 + \frac{\mu}{2\lambda} + \frac{2\lambda}{\mu + 2\lambda} + \frac{\mu^2 + 4\mu\lambda}{2\lambda(\mu + 2\lambda)} \right] = 1$$

$$P_{11} \left[ \frac{2\lambda(\mu + 2\lambda) + \mu(\mu + 2\lambda) + 4\lambda^2 + \mu^2 + 4\mu\lambda}{2\lambda(\mu + 2\lambda)} \right] = 1$$

$$P_{11} \frac{(2\lambda + \mu) [\lambda + \mu + 2\lambda + \mu]}{2\lambda(\mu + 2\lambda)} = P_{11} \frac{2\lambda + \mu}{\lambda} = 1$$

$$P_{11} = \frac{\lambda}{\mu + 2\lambda}.$$

Остальные вероятности равны;

$$P_{01} = \frac{\mu}{2\lambda} P_{11} = \frac{\mu}{2(\mu + 2\lambda)}$$

$$P_{02} = \frac{\mu^2 + 4\mu\lambda}{2(\mu + 2\lambda)^2} = \frac{\mu(\mu + 4\lambda)}{2(\mu + 2\lambda)^2}$$

$$P_{12} = \frac{2\lambda}{2\lambda + \mu} P_{11} = \frac{2\lambda^2}{(\mu + 2\lambda)^2}.$$

Определим характеристики СМО:

$$\lambda_{\text{эфф}} = P_{02} 2\lambda_3;$$

$$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\lambda_{\text{эфф}}}{\lambda_3} = 1 - 2P_{02};$$

$$W_s = 1/\mu; \quad L_q = W_q = 0;$$

$$L_s = W_s \lambda_{\text{эфф}} = \frac{2\lambda_3}{\mu} P_{02}.$$

Рассмотрим СМО, в которой входной поток – поток Эрланга третьего порядка  $\left\langle \frac{(2\lambda)^3 t^2}{2} e^{-2\lambda t}, \mu e^{-\mu t}, m=1, N=0 \right\rangle$ .

Размеченный граф такой СМО приведен на рис. 1.27 :

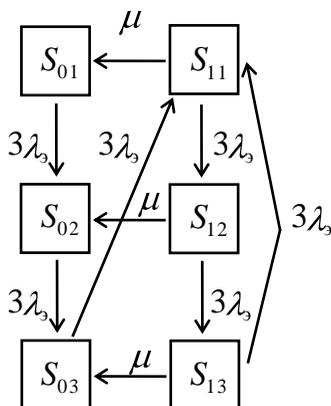


Рис. 1.27. Размеченный граф СМО с входным потоком Эрланга третьего порядка

Для определения характеристик такой СМО надо рассчитать предельные вероятности  $P_{ij}$ , а затем  $L_s, W_s, W_q, L_q$ .

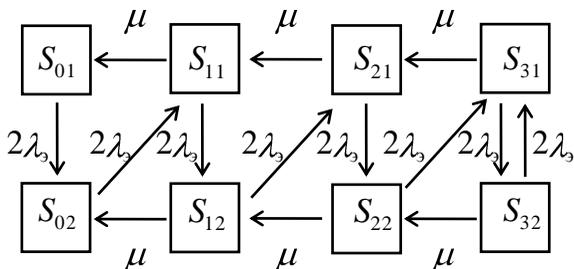


Рис. 1.28. Размеченный граф одноканальной СМО с ограниченной очередью и входным потоком Эрланга второго порядка

Для СМО с ограниченной очередью строится граф увеличением числа состояний, как это делается для пуассоновских СМО. На рис. 1.28 приведен граф для одноканальной СМО с входным потоком Эрланга 2-го порядка и максимальной длиной очереди  $N=2$ .

Чтобы определить характеристики СМО, необходимо рассчитать предельные вероятности  $P_{ij}$ , а затем  $L_s, W_s, W_q, L_q$ .

Нет принципиальных трудностей и для анализа СМО с входным потоком Эрланга  $k$  – го порядка.

### ***1.6.2. Анализ непуассоновских СМО методом вложенных цепей Маркова***

#### ***Анализ СМО с произвольным временем обслуживания***

Рассмотрим СМО класса  $\langle \lambda e^{-\lambda t}, \varphi(t), m=1, N \rightarrow \infty \rangle$ .

Будем называть момент выхода из системы обслуженной заявки *моментом регенерации системы*.

Определим  $q_n$  – вероятность поступления ровно  $n$  заявок в СМО между моментами регенерации. Искомая вероятность вычисляется по формуле:

$$q_n = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \varphi(t) dt.$$

Обозначим состояния СМО:  $S_n$  – в системе находится  $n$  заявок.

Матрица переходов из одного состояния в другое  $\|P_{mn}\|$  имеет вид:

$$\|P_m\| = \begin{array}{cccccccc} & S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_n & \dots & \\ S_0 & q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_n & \dots & \\ S_1 & q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_n & \dots & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ S_m & \dots & \dots & \dots & \dots & q_{n-m+1} & \dots & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \end{array}$$

Отметим, что  $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1$ .

Строка  $S_0$  матрицы совпадает со строкой  $S_1$ , потому что рассматривается интервал между моментами регенерации (моментами выхода заявки из СМО). Эти интервалы не отличаются, была ли в СМО одна заявка в предыдущий момент регенерации (она находилась на обслуживании) или заявок в СМО вообще не было.

Составим систему уравнений для нахождения предельных вероятностей.

$$\begin{aligned} P_0 &= P_0 q_0 + P_1 q_0 \\ P_1 &= P_0 q_1 + P_1 q_1 + P_2 q_0 \\ &\vdots \\ P_n &= P_0 q_n + \sum_{i=0}^{n+1} P_i q_{n+1-i}, \quad (n=0,1,2,\dots) \end{aligned}$$

Используем Z-преобразование для определения характеристик СМО (основные положения Z-преобразования приведены в приложении 3):

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n ;$$

$$P(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_0 q_n}_{P_0 Q(z)} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[ \sum_{i=0}^{n+1} P_i q_{n+1-i} \right]. \quad (1.43)$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[ \sum_{i=0}^{n+1} P_i q_{n+1-i} \right] = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \left[ \sum_{i=0}^{n+1} P_i q_{n+1-i} \right].$$

Сделаем замену  $n+1 = k$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \left[ \sum_{i=0}^k P_i q_{k-i} \right] &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left[ \sum_{i=0}^k P_i q_{k-i} - P_0 q_k \right]. \\ \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{i=0}^k P_i q_{k-i} - \frac{1}{z} P_0 \sum_{k=0}^{\infty} z^k q_k &= \frac{1}{z} P(z) Q(z) - \frac{1}{z} P_0 Q(z). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Выражение (1.44) можно также получить, используя свойство  $Z$ -преобразования:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n P_{n+1} = \frac{1}{z} (P(z) - P_0).$$

Подставляя (1.44) в (1.43), получим:

$$P(z) = P_0 Q(z) + \frac{1}{z} P(z) Q(z) - \frac{1}{z} P_0 Q(z).$$

Откуда

$$P(z) = \frac{P_0 Q(z) (1 - \frac{1}{z})}{1 - \frac{1}{z} Q(z)} = \frac{P_0 Q(z) (z-1)}{z - Q(z)}. \quad (1.45)$$

Рассмотрим подробнее  $Q(z)$ :

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k q_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \varphi(t) dt; \\ Q(z) &= \int_0^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^k}{k!} \right] e^{-\lambda t} \varphi(t) dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(z) &= \int_0^{\infty} e^{\lambda t(z-1)} \varphi(t) dt; \\
 Q'_z(z) &= \int_0^{\infty} \lambda t e^{\lambda t(z-1)} \varphi(t) dt; \\
 Q'_z(1) &= \int_0^{\infty} \lambda t \varphi(t) dt = \lambda M(t); \tag{1.46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q''_z(z) &= \int_0^{\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t(z-1)} \varphi(t) dt; \\
 Q''_z(1) &= \lambda^2 M(t^2) = \lambda^2 [P(t) + M^2(t)]. \tag{1.47}
 \end{aligned}$$

Чтобы определить  $P_0$  в (1.45), надо использовать свойство  $Z$ -преобразования:

$$P \llbracket_{z=1} = 1.$$

При подстановке в (1.45)  $z = 1$  получим неопределенность. Применим правило Лопиталя для нахождения предела  $\lim_{z \rightarrow 1} P(z)$ .

Берем производную числителя и знаменателя:

$$\lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{P_0 Q'_z(z-1) + P_0 Q(z)}{1 - Q'_z(z)} = \frac{P_0 Q(1)}{1 - Q'_z(1)} = 1.$$

Учитывая (4) и тот факт, что  $Q(1) = 1$ , получим:

$$\frac{P_0}{1 - \lambda M(t)} = 1.$$

Откуда

$$P_0 = 1 - \lambda M(t). \tag{1.48}$$

Для существования установившегося режима в СМО (чтобы очередь не росла до бесконечности) необходимо, чтобы  $\lambda M \llbracket < 1$ .

Получим выражение для определения  $L_s$ . Для этого возьмем производную от  $P \llbracket$ :

$$L_s = P'_z(z) = P_0 \frac{Q'_z(z-1) + Q(z) \overline{Q(z)} - (1-Q(z))Q(z)(z-1)}{[Q(z)]^2}.$$

После преобразования получим:

$$P'_z(z) = P_0 \frac{z(z-1)Q'_z - Q(z)(Q(z)-1)}{(z-Q(z))^2}.$$

Среднее число заявок в СМО равно:

$$L_s = P'_z(1) = P_0 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z-1)Q'_z - Q(z)(Q(z)-1)}{(z-Q(z))^2}.$$

Чтобы разрешить неопределенность, воспользуемся правилом Лопиталя:

$$L_s = P_0 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Q''(z^2 - z) + 2zQ'_z - 2Q'_z \cdot Q(z)}{2(z-Q(z))(1-Q'_z)};$$

$$L_s = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ Q'_z + \frac{Q''(z)(z^2 - z)}{2(z-Q(z))} \right].$$

Чтобы вновь снять неопределенность, еще раз воспользуемся правилом Лопиталя:

$$L_s = \lim_{z \rightarrow 1} Q'_z + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Q_z^{(3)}(z^2 - z) + Q''_z(2z - 1)}{2(1-Q'_z)};$$

$$L_s = Q'_z(1) + \frac{Q''_z(1)}{2(1-Q'_z(1))}. \quad (1.49)$$

После подстановки в (1.49) выражения (1.46) и (1.47), получим:

$$L_s = \lambda M(t) + \frac{\lambda^2(D(t) + M^2(t))}{2(1 - \lambda M(t))}, \quad (1.50)$$

которая носит имя формулы Хинчина – Поллачека.

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda; W_s = L_s / \lambda; W_q = W_s - M;$$

$$L_q = W_q \lambda \Rightarrow L_q = \frac{\lambda^2 [D(t) + M^2(t)]}{2(1 - \lambda M(t))}.$$

*Примеры анализа СМО методом вложенных цепей Маркова*

*Пример 1.* Пусть  $\varphi \langle \mathbf{C} \rangle = \mu e^{-\mu}$ , тогда:  $M \langle \mathbf{C} \rangle = 1/\mu$  и  $D \langle \mathbf{C} \rangle = 1/\mu^2$ .

При подстановке математического ожидания и дисперсии в формулу Хинчина–Поллачека получаем ту же формулу  $L_s$ , которая была получена в п. 1.4.1 для пуассоновских систем:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2 \left( \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \right)}{2(1 - \lambda/\mu)} = \rho + \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

*Пример 2.* Пусть  $T$  – время обслуживания – постоянная величина, т.е.  $M \langle \mathbf{C} \rangle = T$ ,  $D \langle \mathbf{C} \rangle = 0$ . После подстановки в формулу Хинчина–Поллачека получим выражение для  $L_s$ :

$$L_s = \lambda T + \frac{\lambda^2 T^2}{2(1 - \lambda T)}.$$

### **СМО с произвольным входным потоком**

Класс СМО  $\langle f \langle \mathbf{C}_m \rangle, m = 1, n \rightarrow \infty \rangle$ .

В этом случае моменты регенерации системы – моменты поступления заявок в СМО.

Матрица переходов из одного состояния в другое  $\|d_{kn}\|$  имеет вид:

$$\|d_{kn}\| = \begin{array}{cccccc} & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \\ S_0 & h_0 & d_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_1 & h_1 & d_1 & d_0 & 0 & \dots & 0 \\ S_2 & h_2 & d_2 & d_1 & d_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{n-1} & h_{n-1} & d_{n-1} & d_{n-2} & d_{n-3} & \dots & d_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

где  $d_0$  – вероятность того, что между моментами регенерации СМО будет обслужено 0 заявок;  $d_n$  – вероятность того, что между моментами регенерации СМО будет обслужено ровно  $n$  заявок, которая определяется по формуле:

$$d_n = \int_0^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} f(t) dt.$$

Вероятности  $h_k$  вычисляются из условия, что сумма вероятностей по каждой строке равна единице:

$$h_k = 1 - \sum_{n=0}^k d_n.$$

Предельные вероятности найдем из уравнения  $\bar{P} = \bar{P} \|d_{kn}\|$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k d_k \\ P_2 = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+1} d_k \\ \vdots \\ P_n = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+n-1} d_k \end{array} \right.$$

Будем находить решение системы уравнений в виде:

$P_n = Bx^n$ , где  $0 < x < 1$ , а  $B$  – постоянный коэффициент.

$$Bx^n = \sum_{k=0}^{\infty} Bx^{k+n-1} d_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k d_k.$$

При  $x \in (0; 1)$  это уравнение имеет единственное решение  $x_0$ , покажем это (рис. 1.29). Введем обозначение  $D(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k d_k$  :

$$D(0) = d_0 > 0; \quad D'_x = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} d_k > 0;$$

$$D''_x = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} d_k > 0.$$

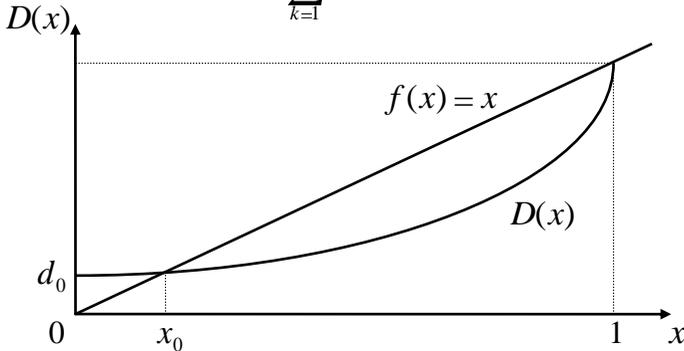


Рис. 1.29. График функции  $D(x)$

Так как  $D'_x > 0$  и  $D''_x > 0$ , то функция  $D(x)$  – выпуклая и монотонно – возрастающая. Чтобы  $x_0$  было единственным решением, необходимо, чтобы  $D'(1) > 1$ .

$$D(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k d_k = \int_0^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\mu t)^k}{k!}}_{e^{\mu t(x-1)}} e^{-\mu t} \cdot f(t) dt;$$

$$D(x) = \int_0^{\infty} e^{\mu t(x-1)} f(t) dt;$$

$$D'_x(1) = \int_0^{\infty} \mu t f(t) dt = \mu M(t).$$

Значит,  $x_0$  существует, если  $\mu M(\cdot) > 1$ .

Решая уравнение  $x = D(\cdot)$ , находим  $x_0$ . Для определения коэффициента  $B$  воспользуемся соотношением  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ :

$$B \sum_{n=0}^{\infty} x_0^n = 1;$$

$$B \frac{1}{1-x_0} = 1;$$

$$B = 1 - x_0.$$

Таким образом,  $P_n = (1-x_0)x_0^n$ .

Определим характеристики СМО:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n;$$

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-x_0)x_0^n = (1-x_0)x_0 \sum_{n=0}^{\infty} n x_0^{n-1};$$

$$F'(x_0) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_0^n \right)'_{x_0} = \frac{1}{(1-x_0)^2};$$

$$L_s = \frac{x_0}{1-x_0};$$

$$W_s = L_s M(t);$$

$$W_q = W_s - 1/\mu;$$

$$L_q = \frac{W_q}{M(t)} = L_s - \frac{1}{\mu M(t)}.$$

*Примеры анализа СМО методом вложенных цепей Маркова*

*Пример 1.* Пусть входной поток – пуассоновский, т.е.  $f(\cdot) = \lambda e^{-\lambda}$ .

Составим уравнение для определения  $x_0$ :  $D(\cdot) = x$ ;

$$D(\leftarrow) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k d_k = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!} \lambda e^{-\lambda t} dt;$$

$$D(x) = \int_0^{\infty} \lambda e^{t(\mu x - \lambda - \mu)} dt = \frac{\lambda}{\mu x - \lambda - \mu} e^{t(\mu x - \lambda - \mu)} \Big|_0^{\infty} = \frac{-\lambda}{\mu x - \lambda - \mu}.$$

Решаем уравнение

$$\frac{-\lambda}{\mu x - \lambda - \mu} = x \rightarrow \mu x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0.$$

Решением данного уравнения будет  $x_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$ ;  $L_s = \frac{\rho}{1 - \rho}$ , т.е.

получаем ту же формулу  $L_s$ , которая была получена в п. 1.4.1 для пуассоновских систем.

*Пример 2.* Пусть входной поток в СМО – регулярный, т.е. интервал между поступлениями заявок  $T = \text{const}$ .

Составляем уравнение для  $x_0$ :  $D(\leftarrow) = x$

$$D(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{(\mu T)^k}{k!} e^{-\mu T} = e^{\mu T(x-1)};$$

$$e^{\mu T(x-1)} = x.$$

Находим  $x_0$  из полученного уравнения.

$$L_s = \frac{x_0}{1 - x_0}; W_s = L_s T; W_q = W_s - \frac{1}{\mu}; L_q = L_s - \frac{1}{\mu T}.$$

## 1.7. СМО с приоритетами

В данном классе СМО на вход поступают несколько потоков заявок разного приоритета. Обозначим эти потоки через  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), где  $i$  – приоритет. Будем считать, что поток  $\lambda_1$  имеет самый высокий приоритет, а  $\lambda_n$  – самый низкий.

### 1.7.1. Одноканальные СМО с приоритетами

Класс СМО  $\langle \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \varphi_i(t), m=1, \infty, PRIOR \rangle$ , где  $\varphi_i(t)$  – плотность функции распределения времени обслуживания заявок  $i$ -го приоритета (произвольный закон).

Суммарный поток заявок в СМО равен:  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ ,  $P_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$  – вероятность того, что на входе СМО поступает заявка  $i$ -го приоритета.

Получим плотность функции распределения времени обслуживания произвольной заявки входного потока:  $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \frac{\lambda_i}{\lambda}$ .

Математическое ожидание времени обслуживания:

$$M_i(t) = \int_0^{\infty} t \varphi_i(t) dt = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i(t);$$

для дисперсии:  $D_i(t) = M_i(t^2) - M_i^2(t)$ ,

$$M(t^2) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n t^2 \varphi_i(t) dt = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i M(t^2),$$

$$D(t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i [M_i(t^2) - M_i^2(t)].$$

Можно также записать:

$$M(t^2) = D(t) + M^2(t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i [D_i(t) + M_i^2(t)].$$

Рассмотрим задачу определения характеристик обслуживания заявок  $k$ -го приоритета.

Время ожидания в очереди заявки  $k$ -го приоритета будет определяться выражением (рис 1.30):

$$\tau_{\text{ож}}^k = \tau_0 + \sum_{i=1}^k n_i q_i + \sum_{i=1}^{k-1} n'_i q_i, \quad (1.51)$$

где  $\tau_0$  – время до окончания обслуживания заявки, находящейся на обслуживании в момент поступления заявки  $k$ -го приоритета,  $n_i$  – заявки более высокого приоритета, которые надо пропустить на обслуживание,  $q_i$  – время обслуживания заявок  $i$ -го приоритета.

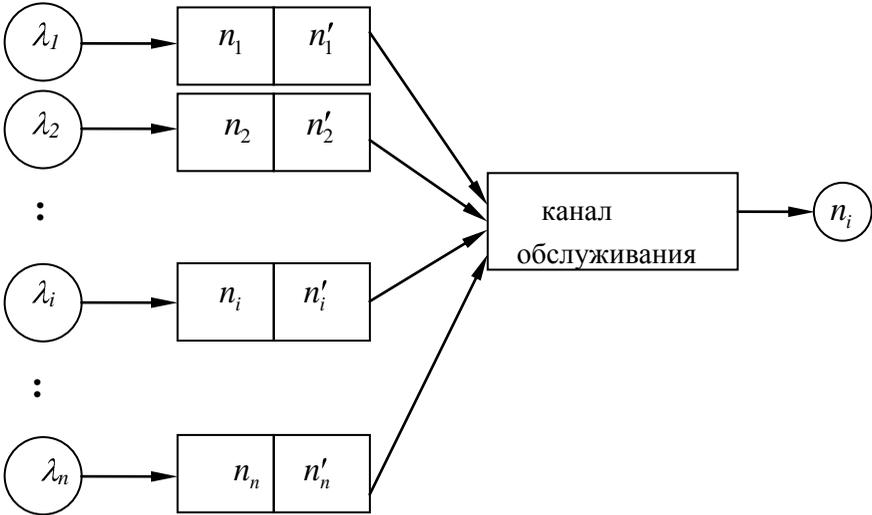


Рис. 1.30. Схема функционирования СМО с приоритетами

$n_i$  – число заявок в очереди в момент поступления заявки  $k$ -го приоритета,  $n'_i$  – число заявок, поступивших в систему за время ожидания в очереди заявок  $k$ -го приоритета.

Сумма  $\sum_{i=1}^{k-1} n'_i q_i$  учитывает тот факт, что надо пропустить на обслуживание заявки более высокого приоритета, которые придут за время ожидания в очереди.

Определим математическое ожидание от (1.51):

$$M(\tau_{\text{ож}}^k) = M(\tau_0) + \sum_{i=1}^k M(n_i)M(q_i) + \sum_{i=1}^{k-1} M(n'_i)M(q_i). \quad (1.52)$$

$M(\tau_{\text{ож}}^k)$  есть не что иное, как среднее время ожидания заявок  $k$ -го приоритета  $W_{q_k}$ .

$M(n_i)$  – среднее число заявок в очереди заявок  $i$ -го приоритета:

$$M(n_i) = L_{q_i} = \lambda_i W_{q_i}.$$

$M(q_i)$  – среднее время обслуживания заявок  $i$ -го приоритета:

$$M(q_i) = M_i(t).$$

Следовательно,

$$M(n_i)M(q_i) = W_{q_i} \lambda_i M_i(t).$$

Обозначим через  $\rho_i = \lambda_i M_i(t)$ , тогда:

$$M(n_i)M(q_i) = \rho_i W_{q_i}.$$

$M(n'_i)$  – среднее число заявок  $i$ -го приоритета, поступивших за время ожидания в очереди заявки  $k$ -го приоритета. Очевидно, что  $M(n'_i) = \lambda_i W_{q_k}$ , а  $M(n'_i)M(q_i) = \lambda_i W_{q_k} M_i(t) = \rho_i W_{q_k}$ .

Перепишем (2) с учетом полученных выражений:

$$W_{q_k} = M(\tau_0) + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i W_{q_i} + W_{q_k} \sum_{i=1}^k \rho_i \quad (1.53)$$

(последнее слагаемое из первой суммы  $W_{q_k}$  перенесли во вторую сумму) или

$$W_{q_k} = \frac{M(\tau_0) + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i W_{q_i}}{1 - \sum_{i=1}^k \rho_i}. \quad (1.54)$$

Рассмотрим, как это выражение переписывается для разных приоритетов:

$$W_{q_1} = \frac{M(\tau_0)}{1 - \rho_1},$$

$$W_{q_2} = \frac{M(\tau_0) + \rho_1 \frac{M(\tau_0)}{1 - \rho_1}}{1 - \rho_1 - \rho_2} = \frac{M(\tau_0)}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)},$$

$$\begin{aligned} W_{q_3} &= \frac{M(\tau_0) + \rho_1 \frac{M(\tau_0)}{1 - \rho_1} + \rho_2 \frac{M(\tau_0)}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}}{1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3} = \\ &= \frac{M(\tau_0)}{(1 - \rho_1 - \rho_2)(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)}. \end{aligned}$$

В общем случае  $W_{q_k} = \frac{M(\tau_0)}{\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i\right)}$  ( $k = 2, 3, \dots$ ).

Обозначим  $\sum_{i=1}^k \rho_i$  через  $S_k$ , тогда:

$$W_{q_1} = \frac{M(\tau_0)}{1 - S_1}, \quad (1.55)$$

$$W_{q_k} = \frac{M(\tau_0)}{(1 - S_{k-1})(1 - S_k)}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (1.56)$$

Остановимся на вопросе определения  $M(\tau_0)$ .

Рассмотрим СМО без приоритетов. В этом случае выражение (1.51) принимает вид:

$$\tau_{\text{ож}} = \tau_0 + \sum_{i=1}^n n_i q_i,$$

а выражение (1.53)  $W_q = M(\tau_0) + W_q \sum_{i=1}^n \rho_i$ .

Откуда получим выражение для  $W_q$ :

$$W_q = \frac{M(\tau_0)}{1 - \sum_{i=1}^n \rho_i}. \quad (1.57)$$

В СМО без приоритетов в соответствии с формулой (1.50) Хинчина–Поллачека:

$$W_q = \frac{\lambda[D(t) + M^2(t)]}{2[1 - \lambda \cdot M(t)]} = \frac{\lambda M(t^2)}{2[1 - \lambda M(t)]}. \quad (1.58)$$

Напомним, что для произвольно выбранной заявки в СМО с приоритетами:

$$M(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i M_i(t)}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i}{\lambda}, \quad (1.59)$$

$$M(t^2) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i M_i(t^2)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i [D_i(t) + M_i(t)]. \quad (1.60)$$

Выражение (1.58) с учетом (1.59) и (1.60) имеет вид:

$$W_q = \frac{\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} [D_i(t) + M_i^2(t)]}{2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \sum_{i=1}^n \rho_i \right)} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i [D_i(t) + M_i^2(t)]}{2 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \rho_i \right)}. \quad (1.61)$$

Если сравнить (1.57) и (1.61), то получаем:

$$M(\tau_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i [D_i(t) + M_i^2(t)], \quad (1.62)$$

а выражение (1.56) примет вид:

$$W_{q_k} = \frac{M(\tau_0)}{\underbrace{(-S_{k-1})}_{-} \underbrace{(-S_k)}_{-}},$$

где  $S_k = \sum_{i=1}^k \rho_i$ ,  $\rho_i = \lambda_i M_i(t)$ .

Для определения остальных характеристик используем формулы Литтла:

$$L_{q_k} = \lambda_k W_{q_k}, \quad W_{s_k} = W_{q_k} + M_k(t), \quad L_{s_k} = \lambda_k W_{s_k} = L_{q_k} + \rho_k.$$

**Пример расчета одноканальной СМО с приоритетами**

Задана СМО, в которую поступают заявки трех приоритетов с интенсивностями  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$ . Время обслуживания заявок – постоянные величины и равны  $T_1 = 1/10$  – для потока первого приоритета,  $T_2 = 1/8$  – для второго приоритета и  $T_3 = 1/8$  – для третьего. Так как времена обслуживания – постоянные величины, то  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 0$  и  $D_3 = 0$ .

Сначала рассчитаем  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ :

$$\rho_1 = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2}; \quad \rho_2 = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}; \quad \rho_3 = 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Далее вычислим  $S_k$ :

$$S_1 = \frac{1}{2}; \quad S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}; \quad S_3 = \frac{7}{8}.$$

Отметим, что  $S_3$  должна быть меньше 1.

Определим  $M(\tau_0)$ :

$$M(\tau_0) = \frac{1}{2} \left[ 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \right] = \frac{31}{40}.$$

Переходим к расчету  $W_{q_k}$ :

$$W_{q_1} = \frac{31}{640 \cdot (1 - 1/2)} = \frac{31}{320}, \quad W_{q_2} = \frac{31}{640 \cdot (1 - 1/2)(1 - 3/4)} = \frac{31}{80},$$

$$W_{q_3} = \frac{31}{640 \cdot (1 - 3/4)(1 - 7/8)} = \frac{31}{20};$$

$$L_{q_1} = 5 \cdot \frac{31}{320} = \frac{31}{64}, \quad L_{q_2} = 2 \cdot \frac{31}{80} = \frac{31}{40}, \quad L_{q_3} = 1 \cdot \frac{31}{20} = \frac{31}{20}.$$

$L_{q_k}$  – средняя длина очереди заявок  $k$ -го приоритета.

$$W_{s_1} = \frac{31}{320} + \frac{1}{10} = \frac{63}{320}, \quad W_{s_2} = \frac{31}{80} + \frac{1}{8} = \frac{41}{80}, \quad W_{s_3} = \frac{31}{20} + \frac{1}{8} = \frac{67}{40};$$

$$L_{s_1} = \frac{31}{64} + \frac{1}{2} = \frac{63}{64} \quad \left( \rho_1 = \frac{1}{2} \right), \quad L_{s_2} = \frac{31}{40} + \frac{1}{4} = \frac{41}{40} \quad \left( \rho_2 = \frac{1}{4} \right),$$

$$L_{s_3} = \frac{31}{20} + \frac{1}{8} = \frac{67}{40} \quad \left( \rho_3 = \frac{1}{8} \right).$$

### 1.7.2. Многоканальные СМО с приоритетами

Класс СМО  $\langle \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \mu_i e^{-\mu_i t}, m > 1, \infty, \text{PRIOR} \rangle$ .

Потоки заявок всех приоритетов – пуассоновские, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону. Интенсивность обслуживания произвольной заявки определяется по формуле:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i}{\lambda}.$$

Введем обозначения:  $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ ;  $\theta_i = \frac{\rho_i}{m}$ .

Как и в одноканальной СМО с приоритетами, в данной СМО время ожидания в очереди заявки  $k$ -го приоритета равно (см. формулу (1.51)):

$$\tau_{\text{ож}}^k = \tau_0 + \sum_{i=1}^k n_i q_i + \sum_{i=1}^{k-1} n'_i q_i.$$

Проделав выкладки, как и для одноканальной СМО, получим:

$$W_{q_k} = \frac{M(\tau_0)}{\underbrace{(-S_{k-1})}_{\underbrace{-S_k}}}, \quad (1.63)$$

где  $S_k = \sum_{i=1}^k \theta_i$ .

Чтобы определить  $M(\tau_0)$ , рассмотрим СМО без приоритетов:

$$W_q = \frac{M(\tau_0)}{1 - \sum_{i=1}^n \theta_i} = \frac{m \cdot M(\tau_0)}{\left(m - \sum_{i=1}^n \rho_i\right)}. \quad (1.64)$$

Среднее время ожидания заявок в очереди для СМО без приоритетов определяется по формуле (см. п. 4.1.2):

$$W_q = \frac{P_0 \cdot \rho^m \cdot \theta}{\lambda \cdot m! (1 - \theta)^2}, \quad (1.65)$$

где  $P_0 = \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{1}{1 - \theta} \right]^{-1}$ .

Приравнявая (1.64) и (1.65), получим:  $\frac{M(\tau_0)}{1 - \theta} = \frac{P_0 \cdot \rho^m \cdot \theta}{\lambda \cdot m! (1 - \theta)^2}$ .

В результате получаем:  $M(\tau_0) = \frac{P_0 \cdot \rho^m \cdot \theta}{\lambda \cdot m! (1 - \theta)}$ .

Если использовать замену  $\theta = \frac{\rho}{m}$ , то получим:

$$M(\tau_0) = \frac{P_0 \cdot \rho^{m+1}}{\lambda \cdot (m-1)! (m - \rho)},$$

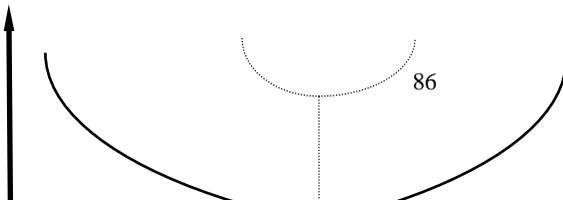
а  $W_{q_k}$  вычислим по формуле (1.63).

Далее, используя формулы Литтла, определим:

$$L_{q_k} = \lambda_k W_{q_k}, \quad W_{s_k} = W_{q_k} + \frac{1}{\mu_k}, \quad L_{s_k} = \lambda_k W_{s_k} = L_{q_k} + \rho_k.$$

## 1.8. Оптимизация параметров СМО

При проектировании или совершенствовании СМО возникает задача оптимизации ее параметров. От качества обслуживания зависят затраты на СМО и потери в СМО.



потери от низкого  
уровня  
обслуживания

затраты на  
функционирование  
СМО

оптимальный уровень  
качества

качество  
обслуживания

Рис. 1.31. Определение оптимального уровня качества СМО

Ставится задача определения оптимального уровня качества обслуживания. Можно сформулировать большое число задач оптимизации СМО, формируя различные целевые функции. В данном разделе в качестве примеров рассмотрено несколько постановок таких задач.

### **Задача оптимальной интенсивности обслуживания в одноканальной СМО с бесконечной очередью**

Класс СМО  $\langle \lambda e^{-\lambda}, \mu e^{-\mu}, m = 1, \infty \rangle$ .

$F(\mu) = C_1 L_s + C_2 \mu$  – целевая функция, где  $C_1$  – потери в единицу времени от пребывания заявки в СМО,  $C_2$  – затраты в единицу времени при увеличении интенсивности обслуживания на единицу.

С учетом того, что  $L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ , получим целевую функцию:  $F(\mu) = C_1 \frac{\lambda}{\mu-\lambda} + C_2 \mu$ . Для определения минимума целевой функции найдем производную:

$$F'_\mu = -\frac{C_1 \lambda}{(\mu-\lambda)^2} + C_2 = 0.$$

Искомая оптимальная интенсивность находится из уравнения:

$$C_1 \lambda = C_2 (\mu - \lambda)^2,$$

$$\mu_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{C_1 \lambda}{C_2}} + \lambda.$$

### Задача оптимальной интенсивности в одноканальной СМО без очереди

$F(\mu) = C_3 \lambda_{\text{отк}} + C_2 \mu$  – целевая функция, где  $C_3$  – потери от отказа в обслуживании (доходы от обслуживания одной заявки),  $C_2$  – затраты в единицу времени при увеличении интенсивности обслуживания на единицу (то же, что в предыдущей задаче).

Поскольку  $P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ,  $P_{\text{отк}} \lambda = \lambda_{\text{отк}}$ , то

$$F(\mu) = C_3 \frac{\lambda^2}{\mu + \lambda} + C_2 \mu,$$

$$F'_\mu = \frac{-C_3 \lambda^2}{(\mu + \lambda)^2} + C_2 = 0,$$

откуда получим:

$$\mu_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{C_3}{C_2}} \cdot \lambda - \lambda.$$

### Задачи оптимизации параметров многоканальной СМО

Класс СМО  $\langle \lambda e^{-\lambda t}, \mu e^{-\mu t}, m > 1, \infty \rangle$ .

*Определение оптимального числа каналов.* Сформируем целевую функцию:  $F(m) = C_1 L_s + C_4 m$ , где  $C_4$  – затраты в единицу времени на функционирование одного канала,  $C_1$  – то же, что в задачах оптимальной интенсивности, рассмотренных выше. В данном классе СМО не удастся аналитически определить оптимальное число каналов. Поэтому необходимо построить зависимость  $F(m)$  используя

аппарат анализа многоканальных СМО (см. п. 1.4.2) и по  $F(m)$  определить оптимальное число каналов.

Класс СМО  $\langle \lambda e^{-\lambda t}, \mu e^{-\mu t}, m > 1, N \rangle$ .

*Определение оптимального числа мест в очереди*

Для данного класса СМО целевая функция имеет вид:

$F(N) = C_1 L_s + C_3 P_{\text{отк}} \lambda + C_5 N$ , где  $C_5$  – затраты в единицу времени на поддержание одного места в очереди,  $C_1, C_3$  – те же коэффициенты, что в задачах оптимальной интенсивности в одноканальной СМО. В этой задаче тоже не удастся аналитически определить оптимальное число каналов. Поэтому необходимо построить зависимость  $F(N)$  и определить оптимальное число мест в очереди.

### **Задачи оптимизации СМО по нескольким параметрам**

Класс СМО  $\langle \lambda e^{-\lambda t}, \mu e^{-\mu t}, m > 1, N \rangle$ .

Рассмотрим задачу определения оптимального количества каналов  $m$  и числа мест в очереди  $N$  в многоканальных СМО.

Целевая функция имеет вид:

$F(N, m) = C_1 L_s + C_4 m + C_3 P_{\text{отк}} \lambda + C_5 N$ , где коэффициенты  $C_1, C_3, C_4, C_5$  интерпретированы в ранее рассмотренных задачах. Для нахождения оптимальных значений  $m$  и  $N$  следует использовать методы поиска экстремума. Если целевая функция не унимодальна, то следует использовать методы поиска глобального экстремума.

На практике ставятся задачи оптимизации параметров не отдельной СМО, а сети СМО. Принципиально их постановка не отличается от задач оптимизации СМО.

### **Вопросы и задачи**

1. Для каких классов СМО справедливы формулы Литтла?
2. Информационная система технологии "клиент-сервер" обслуживает клиентов. Поток запросов в систему пуассоновский, интенсивностью 20/мин. Время обработки запроса сервером (поиск и

передача по каналам связи) распределено по экспоненциальному закону. Интенсивность обработки сервером запросов равна 30/мин.

Определить: а) какую часть времени сервер простаивает; б) среднее время реакции (время ответа) информационной системы.

3. В парикмахерской клиентов обслуживают 4 мастера. Время обслуживания распределено по экспоненциальному закону. Среднее время обслуживания одного клиента 30/мин. Поток клиентов пуассоновский – 6 чел./ч.

Определить: а) среднее число клиентов в очереди; б) среднее число занятых мастеров; в) среднее время нахождения клиента в парикмахерской, включая ожидание в очереди.

4. Установка состоит из трех узлов. Поток отказов каждого из узлов пуассоновский с интенсивностью 2/ч. Среднее время ремонта одного узла – 10 мин., время ремонта распределено по экспоненциальному закону.

Найти среднюю производительность установки, если при трех исправных блоках ее производительность составляет 100 %, при двух исправных – 70 %, а при одном исправном – 50 %.

5. Имеется одноканальная СМО с отказами с входным пуассоновским потоком интенсивностью б/ч, время обслуживания подчинено распределению Эрланга третьего порядка. Среднее время обслуживания 15 мин.

Определить вероятность отказа, среднее число заявок в системе.

6. Два подъемных крана обслуживают 3 грузовых автомобиля. Интервал времени между поступлениями каждого автомобиля на погрузку распределен экспоненциально со средним значением 20 мин. Время загрузки автомобиля подъемным краном также распределено экспоненциально со средним 12 мин.

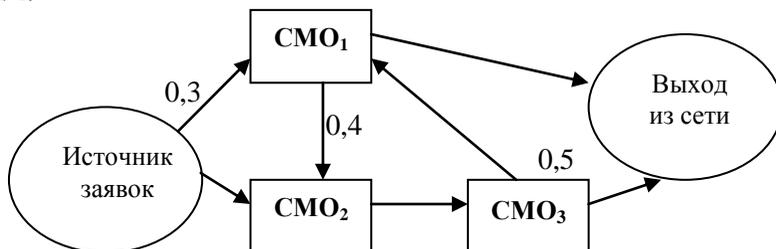
Вычислить часть времени, в течение которого оба подъемных крана простаивают. Определите среднее число автомобилей, ожидающих очереди.

7. Производственно-технологический процесс состоит из четырех последовательных технологических узлов. На вход процесса поступают детали на обработку в соответствии с пуассоновским распределением с интенсивностью 4 детали в час. В каждом узле время обработки распределено по экспоненциальному закону со сред-

ним временем 12 мин. в первом узле, 15 мин. во втором, 12 мин. в третьем, 15 мин. в четвертом. После обработки в каждом узле осуществляется контроль качества детали: доля качественных деталей на выходе первого узла равна 80 %, на выходе второго узла – 80 %, на выходе третьего узла – 80 %, на выходе четвертого узла – 90 %.

Определить долю брака после обработки по всему технологическому процессу, среднее время обработки детали по всему процессу; среднее число деталей, находящихся в очередях на обработку.

8. Задана циклическая пуассоновская сеть СМО. Входной поток интенсивностью – 10 заявок/ч, интенсивность обслуживания в СМО<sub>1</sub> – 20 заявок/ч, в СМО<sub>2</sub> – 16 заявок/ч, в СМО<sub>3</sub> – 18 заявок/ч.



Определить: а) среднее время пребывания заявок в сети; б) среднее число заявок в сети СМО; в) среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очередях сети СМО.

9. Имеется трехканальная СМО с неограниченной очередью: входной поток пуассоновский с интенсивностью 12 заявок/ч, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону. Среднее время обслуживания одной заявки одним аппаратом – 10 мин.

Выгодно ли с точки зрения среднего числа заявок в системе вводить взаимопомощь между аппаратами и с какой дисциплиной взаимопомощи?

10. На стоянке автомобилей имеется 5 мест. Автомобили пребывают на стоянку в соответствии с пуассоновским распределением с интенсивностью 10 автомобилей в час. Продолжительность

пробывания автомобилей на стоянке распределена экспоненциально со средним значением 30 мин.

Вычислить: а) среднее число свободных мест на стоянке; б) вероятность того, что автомобиль найдет на стоянке свободное место; в) эффективную частоту прибытия автомобилей на стоянку.

11. В СМО поступают заявки трех категорий. К первой категории относятся заявки, характеризующиеся высшим приоритетом, которые принимаются к исполнению первыми. Заявки третьей категории принимаются к исполнению в том случае, если отсутствуют заявки первой и второй категорий. Выполнение заявок не прерывается. Заявки первой, второй и третьей категорий поступают в соответствии с пуассоновским законом с частотами 5, 10, 5 заявок в час. Интенсивность выполнения заявок фиксирована и равна: 20 заявок для первой категории, 30 заявок для второй категории, 30 заявок для третьей категории.

Вычислить для каждой из трех категорий заявок среднее время ожидания в очереди, среднее число заявок в очереди. Определить среднее время ожидания в очереди произвольно выбранной заявки, среднее число заявок, находящихся в системе.

12. В цехе работают три станка. С частотой 3 раза в смену (за 8 ч) производится переналадка станков, время между сроками переналадки распределено по экспоненциальному закону. Бригада наладчиков обслуживает станки в соответствии с экспоненциальным распределением со средним 20 мин.

Определить: а) часть времени, которую бригада наладчиков простаивает; б) часть времени, которую все станки простаивают.

13. В автомойке работают три мастера. Мест для стоянки машин нет (очереди не может быть). Входной поток пуассоновский с интенсивностью 10 машин в час, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, среднее время обслуживания одной машины одним мастером – 15 мин.

Определите, выгодно ли с точки зрения увеличения среднего числа обслуженных машин в час вводить взаимопомощь между ними и с какой дисциплиной взаимопомощи?

14. Информационная система технологии "клиент-сервер" обслуживает клиентов. Поток запросов в систему пуассоновский, интен-

сивностью 1500/ч. Время обработки запроса сервером (поиск и передача по каналам связи) распределено по экспоненциальному закону.

Какова должна быть интенсивность обработки запросов, чтобы время реакции информационной системы была не более двух сек.?

## 2. ТЕОРИЯ ИГР

В данном разделе рассматриваются элементы теории игр, связанные с анализом конфликтных ситуаций, когда есть соперничество (конкуренция) участников. Примерами таких задач является конкуренция фирм за рынки сбыта.

Другой постановкой является задача выбора партнеров для совместной деятельности, анализ и решение этой задачи относится к коалиционным играм. В этих задачах решается вопрос на основе анализа ситуации выбора потенциальных партнеров для решения общих проблем.

Имеются и другие постановки задач в теории игр [6].

### 2.1. Основные понятия теории игр

Пусть  $A, B, D$  – участники игры.

Каждый участник имеет в своем распоряжении множество *чистых стратегий* (возможных ходов в этой игре):

$A: \{S_{1a}, S_{2a}, \dots, S_{na}\}$  или  $\{S_{ia}\} (i = 1, 2, \dots, n)$ ;

$B: \{S_{jb}\} (j = 1, 2, \dots, m)$ ;

$D: \{S_{kd}\} (k = 1, 2, \dots, l)$ .

Исход – сочетание  $S_{ia}, S_{jb}, S_{kd}$  (когда  $A$  выбирает одну чистую стратегию,  $B$  – другую, а  $D$  – третью).

Каждый из исходов характеризуется полезностью (выигрышем) для каждого участника:

$a_{ijk}$  – полезность исхода для участника  $A$ ;

$b_{ijk}$  – для участника  $B$ ;

$c_{ijk}$  – для участника  $D$ .

Решить задачу – значит найти оптимальную стратегию выбора стратегий для участников. Возможные критерии оптимальности:

- справедливость;
- устойчивость (устраивает всех участников).

## Классификация игр

Если для всех участников существует конечное число чистых стратегий  $S_{ia}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $S_{jb}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), где  $n$  и  $m$  конечны, то такие игры являются *конечными*.

*Игры с двумя участниками A и B.* Если  $b_{ij} = -a_{ij}$ , то эти игры называются *антагонистическими* (выигрыш одного влечет проигрыш другого). В этом случае достаточно задать только одну матрицу  $\|a_{ij}\|$ , поэтому такие игры называются *матричными*. В общем случае игры с двумя участниками называются *биматричными*.

Если для каждого участника существует только две стратегии, то такие игры называются *диадическими*.

### 2.2. Матричные игры с седловой точкой

Пусть задана для участника A матрица выигрышей  $\|a_{ij}\|$ , которую называют *платежной матрицей*.

Рассмотрим решение матричных игр данного класса на следующем примере:

	$S_{1b}$	$S_{2b}$	$S_{3b}$	$S_{4b}$	$S_{5b}$	$\min_j a_{ij}$
$S_{1a}$	16	-22	-7	14	-8	-22
$S_{2a}$	11	10	8	9	21	8
$S_{3a}$	6	-9	6	13	-13	-13
$S_{4a}$	2	16	-5	-3	4	-5
$\max_i a_{ij}$	16	16	8	14	21	

*Определение 1 (доминирующая стратегия).* Если для двух стратегий  $S_{ia}$  и  $S_{ka}$  выполняется условие  $a_{ij} \geq a_{kj}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), и суще-

существует хотя бы одна стратегия  $S_{sb}$  такая, что  $a_{is} > a_{ks}$ , тогда  $S_{ia}$  является *доминирующей стратегией* по отношению к  $S_{ka}$ , а чистая стратегия  $S_{ka}$  – *доминируемой стратегией*.

Если для пары стратегий  $S_{jb}$  и  $S_{lb}$   $a_{ij} \leq a_{il}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), и существует  $S_{sa}$  такая, что  $a_{sj} < a_{sl}$ , тогда  $S_j$  – *доминирующая* по отношению к  $S_l$ , а  $S_l$  – *доминируемая стратегия*.

Доминируемые стратегии можно исключить из матрицы  $\|a_{ij}\|$ , так как оптимального решения среди них не будет.

Выбираем оптимальную стратегию  $S_{2a}^*$  для участника  $A$  по принципу:

$$\max_i \left( \min_j a_{ij} \right) = \alpha.$$

Величина  $\alpha$  определяет нижнюю цену игры. Выбор стратегии по этому принципу гарантирует, что выигрыш будет не меньше, чем  $\alpha$ .

Для участника  $B$  оптимальная стратегия  $S_{2a}^*$  определяется по принципу:  $\min_j \left( \max_i a_{ij} \right) = \beta$  – верхняя цена игры.

Игры, у которых  $\alpha = \beta$ , называются *играми с седловой точкой*.

Отметим, что всегда  $\alpha \leq \beta$ . Действительно, пусть  $\alpha = a_{ik}$  и  $\beta = a_{sj}$ :

$$\|a_{ij}\|: \begin{vmatrix} a_{ik} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{sk} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{sj} \end{vmatrix}$$

$a_{ik} \leq a_{ij}$ , так как  $a_{ik}$  – минимальное в строке  $i$ ;  $a_{ij} \leq a_{sj}$ , так как  $a_{sj}$  – максимальное в столбце  $j$ , откуда следует, что  $a_{ik} \leq a_{sj}$ .

Может быть несколько седловых точек, тогда цена игры во всех этих точках одинакова:  $\alpha = \beta = \gamma$ , где  $\gamma$  – цена игры.

Пусть существуют две седловые точки  $a_{ik}, a_{sj}$ . Из условий определения седловых точек следует:

$$a_{ik} \leq a_{ij}; a_{ij} \leq a_{sj}; a_{ik} \geq a_{sk}; a_{sk} \geq a_{sj}.$$

Все эти нестрогие неравенства выполняются только в случае, когда все 4 числа равны:  $a_{ik} = a_{ij} = a_{sk} = a_{sj}$ .

### 2.3. Матричные игры без седловой точки

В данном классе игр нижняя цена игры строго меньше верхней  $\alpha < \beta$ .

Введем понятие *смешанной стратегии*. Смешанная стратегия – комбинация чистых стратегий с вероятностями выбора  $P_{ia}$ :

$$S_a = \{P_{1a}, P_{2a}, \dots, P_{na}\}; \quad \sum_{i=1}^n P_{ia} = 1.$$

Оптимальная смешанная стратегия:  $S_a^* = \{P_{ia}^*\}$ .

Для любой матрицы  $\|a_{ij}\|$  можно определить оптимальную смешанную стратегию:  $S_a^* = \{P_{ia}^*\}, S_b^* = \{P_{jb}^*\}$ , такую, что выигрыш участника  $A$ , определяемый в соответствии с выражением:

$$a_A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} P_{ia}^* P_{jb}^*,$$

будет в интервале  $[\alpha, \beta^-]$  (для участника  $B$  это проигрыш  $a_B$ ).

**Теорема о минимаксе.** В матричной игре без седловой точки ( $\alpha < \beta$ ) существует точка равновесия такая, что выигрыш участника  $A$  находится в интервале  $\beta > a_A > \alpha$ , и оптимальные решения для участников находятся из условий:

$$\text{для } A - \{P_{ia}^*\} \text{ из условия } \max \left( \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} P_{ia} \right),$$

для  $B - \{P_{jb}^*\}$  из условия  $\min \left( \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} P_{jb} \right)$ ,

$a_A = a_B = \gamma$  – цена игры.

*Доказательство* теоремы будет рассмотрено далее.

*Определение 2 (активные стратегии).* Активные стратегии для участника  $A$  – это те стратегии из множества чистых  $S_{ia}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), для которых  $P_{ia}^* > 0$ .

**Утверждение 1.** Если участник  $A$  придерживается оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш не зависит от стратегии участника  $B$  в пределах активных стратегий участника  $B$ .

*Доказательство.* Пусть участник  $A$  придерживается оптимальной смешанной стратегии, а  $B$  – произвольной смешанной. Тогда выигрыш участника равен:

$$\gamma_A = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} P_{ia}^* P_{jb} = \sum_{j=1}^m P_{jb} \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} P_{ia}^* \right).$$

Пусть  $\gamma_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} P_{ia}^*$  – выигрыш участника  $A$ , если участник  $B$  придерживается чистой стратегии  $S_{jb}$ , и одновременно  $\gamma_j$  – проигрыш для участника  $B$ , тогда

$$\gamma_A = \sum_{j=1}^m \gamma_j P_{jb}. \quad (2.1)$$

Поскольку чистая стратегия  $S_{jb}$  не является оптимальной стратегией для участника  $B$ , то  $\gamma_j \geq \gamma$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, m$ , где  $\gamma$  – цена игры.

Запишем (2.1) с учетом этого неравенства:

$$\gamma_A = \sum_{j=1}^m \gamma_j P_{jb} \geq \sum_{j=1}^m \gamma P_{jb} = \gamma \sum_{j=1}^m P_{jb}.$$

С учетом, что  $\sum_{j=1}^m P_{jb} = 1$ , получаем нестрогое неравенство

$\gamma_a \geq \gamma$ . Но так как участник  $B$  осуществляет выбор на множестве активных стратегий, а  $P_{ia}^*$  – оптимальная стратегия для  $A$ , то  $\gamma_a$  не может быть больше  $\gamma$ . Следовательно  $\gamma_a = \gamma$ .

### 2.3.1. Решение матричных игр $2 \times 2$

Каждый из участников имеет по две чистые стратегии. Матрица выигрышей для  $A$  имеет вид:

$$\|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Элементы матрицы таковы, что  $\alpha < \beta$ , т.е. седловой точки нет.

В качестве решения игры необходимо получить смешанные стратегии  $\{P_{1a}^*, P_{2a}^*\}, \{P_{1b}^*, P_{2b}^*\}$ .

На основе доказанного выше утверждения для оптимальной стратегии участника  $A$  будет выполняться следующее тождество:

$$P_{1a}^* \cdot a_{11} + P_{2a}^* \cdot a_{21} = P_{1a}^* \cdot a_{12} + P_{2a}^* \cdot a_{22}.$$

Учитывая, что  $P_{2a}^* = 1 - P_{1a}^*$ :

$$P_{1a}^* \cdot a_{11} + (1 - P_{1a}^*) a_{21} = P_{1a}^* \cdot a_{12} + (1 - P_{1a}^*) a_{22}.$$

Откуда получим

$$P_{1a}^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{22} + a_{11} - a_{12} - a_{21}}, \quad (2.2)$$

$$P_{2a}^* = 1 - P_{1a}^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{22} + a_{11} - a_{12} - a_{21}}. \quad (2.3)$$

Для определения  $P_{1b}^*$  также составим уравнение:

$$P_{1b}^* \cdot a_{11} + P_{2b}^* \cdot a_{12} = P_{1b}^* \cdot a_{21} + P_{2b}^* \cdot a_{22};$$

$$P_{1b}^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} + a_{11} - a_{12} - a_{21}}; \quad (2.4)$$

$$P_{2b}^* = 1 - P_{1b}^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{22} + a_{11} - a_{12} - a_{21}}. \quad (2.5)$$

Цена игры (выигрыш для участника  $A$ ) будет равна:

$$\gamma = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} P_{ia}^* P_{jb}^* = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{22} + a_{11} - a_{12} - a_{21}}.$$

Для того чтобы решения (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) были положительными числами (вероятностями), необходимо, чтобы для элементов

матрицы  $\|a_{ij}\|$  выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0 \\ a_{22} - a_{12} > 0 \\ a_{11} - a_{21} > 0 \\ a_{11} - a_{12} > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0 \\ a_{22} - a_{12} < 0 \\ a_{11} - a_{21} < 0 \\ a_{11} - a_{12} < 0 \end{cases}.$$

**Пример задачи.** Правила игры. Каждый из участников имеет две чистые стратегии:

$S_1$  – выбрать число 1,

$S_2$  – выбрать число 2.

Если сумма у двух участников окажется четным числом, то выигрыш  $A$  составит эту сумму. Если же сумма окажется нечетной, то выигрывает участник  $B$ .

Данные правила отражены в следующей платежной матрице:

$$\begin{array}{cc|cc} & & S_1 & S_2 \\ S_1 & & 2 & -3 \\ S_2 & & -3 & 4 \end{array}.$$

Найдем оптимальные смешанные стратегии для каждого из участников

$$P_{1a}^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{22} + a_{11} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4 + 3}{4 + 2 + 3 + 3} = \frac{7}{12};$$

$$P_{2a}^* = \frac{5}{12}.$$

Для участника  $B$  решением будет:

$$P_{1b} = \frac{4 + 3}{4 + 2 + 3 + 3} = \frac{7}{12};$$

$$P_{2b} = \frac{5}{12}.$$

Цена игры равна:  $\gamma = \frac{4 \cdot 2 - 3 \cdot 3}{12} = -\frac{1}{12}.$

Поскольку  $\gamma < 0$ , выигрывает участник  $B$ ; из этого можно сделать вывод, что правила игры несправедливы.

Отметим, что при выборе участником  $B$  оптимальной смешанной стратегии его выигрыш  $\gamma = \frac{1}{12}$  не будет зависеть от действий противника. Это следует из утверждения 1, поскольку у участника  $A$  обе чистые стратегии активные.

**Графическая интерпретация решения игры  $2 \times 2$ .** Построим зависимость выигрыша участника  $A$  от  $P_{1a}$  (рис. 2.1),

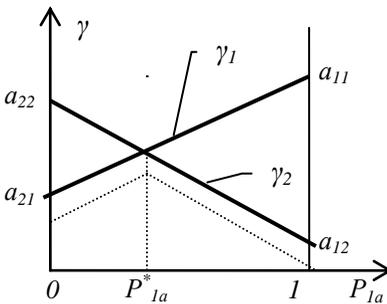


Рис. 2.1. Графическая интерпретация решения игры за участника  $A$

где  $\gamma_1 = P_{1a}a_{11} + (1 - P_{1a})a_{21}$  — выигрыш участника  $A$ , если участник придерживается чистой стратегии  $S_{1b}$ ,  
 $\gamma_2 = P_{1a}a_{12} + (1 - P_{1a})a_{22}$  — если участник придерживается чистой стратегии  $S_{2b}$ .

Приравняв  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , получим оптимальное значение  $P_{1a}^*$ , которое соответствует

$\max \left( \min_j \gamma_j \right)$ , т.е.  $A$  максимизировал свой выигрыш.

Теперь рассмотрим решение игры с позиции участника  $B$ . Построим зависимость его проигрыша от  $P_{1b}$  (рис. 2.2),

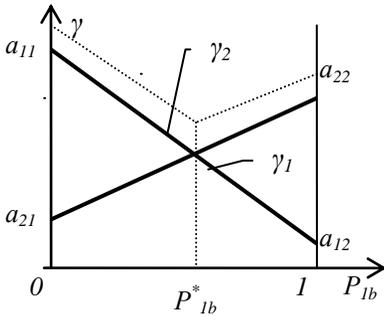


Рис. 2.2. Графическая интерпретация решения игры за участника  $B$

где  $\gamma_1 = P_{1b} a_{11} + (-P_{1b}) \overline{a}_{12}$  — проигрыш участника  $B$ , если участник придерживается чистой стратегии  $S_{1a}$ ,

$\gamma_2 = P_{1b} a_{21} + (-P_{1b}) \overline{a}_{22}$  — если участник придерживается чистой стратегии  $S_{2a}$ .

Оптимальное значение  $P_{1b}^*$  получается из условия  $\min_i \left( \max_j \gamma_j \right)$ , т.е. он минимизирует проигрыш.

### 2.3.2. Решение матричных игр $2 \times m$ графоаналитическим методом

Если участник  $A$  имеет 2 чистые стратегии, а  $B$  —  $m$  чистых стратегий, то матрица выигрышей для  $A$  имеет вид:

$$\|a_{ij}\|: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \end{vmatrix}.$$

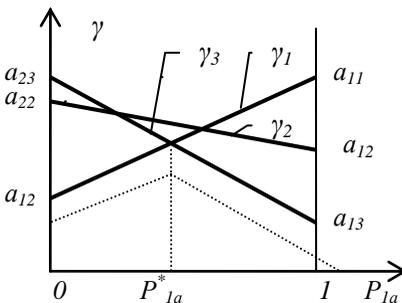


Рис. 2.3. Графическая интерпретация решения игры  $2 \times m$

Построим зависимость выигрыша участника  $A$  от  $P_{1a}$  при чистых стратегиях участника  $B$

$S_{jb}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\gamma_j = a_{1j} P_{1a} + a_{2j} (-P_{1a}).$$

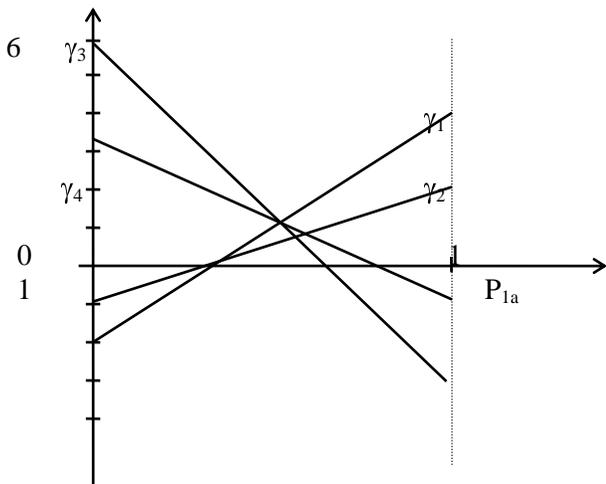
Оптимальное  $P_{1a}$  находим из условия  $\max\left(\min_j \sum_{i=1}^2 a_{ij} P_{ia}\right)$

(рис. 2.3). Найденному  $P_{1a}^*$  соответствуют две чистые стратегии участника  $B$ , которые будут для него активными. Таким образом, игру  $2 \times t$  сводим к игре  $2 \times 2$ .

Если несколько прямых пересекаются в одной точке, то нужно брать две стратегии, которые имеют более острый угол, это обеспечит более устойчивое решение.

**Пример.** Дана платежная матрица, необходимо найти оптимальные смешанные стратегии:

$$\|a_{ij}\|: \begin{vmatrix} -2 & -1 & 6 & 3,2 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$



Строим зависимость  $\gamma_j$  от  $P_{1a}$ : выбираем стратегии  $S_{2b}$  и  $S_{3b}$  по принципу

$$\max\left(\min_j \sum_{i=1}^2 a_{ij} P_{ia}\right).$$

Переходим к матрице

$$2 \times 2 - \|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \text{ и}$$

рассчитываем оптимальные  $P_{1a}^*$  и  $P_{2a}^*$ :

$$P_{1a}^* = \frac{-3-2}{-3-1-2-6} = \frac{5}{12};$$

$P_{2a}^* = \frac{7}{12}$ . Решением игры для участника  $B$  является:

$$P_{2b}^* = \frac{-3-6}{-12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}; \quad P_{3b}^* = \frac{1}{4}; \quad P_{1b}^* = 0; \quad P_{4b}^* = 0.$$

### 2.3.3. Решение матричных игр $n \times 2$ графоаналитическим методом

Участник  $A$  имеет  $n$  чистых стратегий, а  $B$  – 2 чистые стратегии, платежная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix}.$$

Построим зависимость проигрыша участника  $B$  от  $P_{1b}$  при чистых стратегиях  $A$   $S_{ia}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\gamma_i = a_{i1}P_{1b} + a_{i2}(1 - P_{1b}).$$

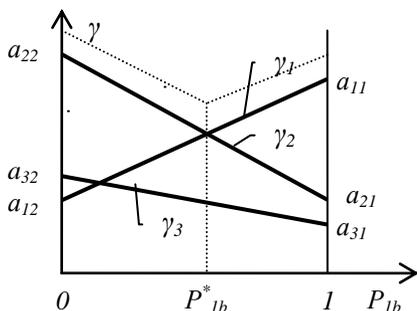


Рис. 2.4. Графическая интерпретация решения игры  $n \times 2$

Оптимальное  $P_{1b}^*$  находим из условия  $\min \left( \max_i \sum_{j=1}^2 a_{ij} P_{jb} \right)$ , после чего выделяем две активные стратегии для участника  $A$  и переходим к игре  $2 \times 2$ .

### 2.3.4. Решение матричных игр $n \times m$

Задана  $\|a_{ij}\|$  – матрица выигрышей для игрока  $A$ . Необходимо найти оптимальные смешанные стратегии:

$$S_a^* = \{P_{1a}^*, \dots, P_{ia}^*, \dots, P_{na}^*\}$$

$$S_b^* = \{P_{1b}^*, \dots, P_{jb}^*, \dots, P_{mb}^*\}.$$

**Рассмотрим решение игры для игрока А.**

Выигрыш игрока А, если В принимает фиксированную чистую стратегию  $S_{jb}$ , будет равен:

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} P_{ia} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (2.6)$$

Найдем минимум из  $\gamma_j$ , обозначим его через  $\bar{\gamma} = \min_j \gamma_j$ . Будем искать  $P_{ia}^*$  из условия  $\max \bar{\gamma}$ .

Все  $\gamma_j \geq \bar{\gamma} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$ , так как  $\bar{\gamma}$  – минимальное. Поэтому (2.6) перепишем в виде неравенств:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} P_{ia} \geq \bar{\gamma} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (2.7)$$

Для вероятностей  $P_{ia}$  выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^n P_{ia} = 1. \quad (2.8)$$

Нахождение  $\max \bar{\gamma}$  равносильно поиску  $\min \frac{1}{\gamma}$ . Для удобства на-

хождения  $P_{ia}$  введем переменную  $x_i = \frac{P_{ia}}{\gamma}$ , тогда (2.7) перепишется

в виде:  $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$ , а (2.8) – в виде  $\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{\gamma}$ .

Определяем  $x_i^*$  из условия, что  $\min \sum_{i=1}^n x_i$  при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \geq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m);$$

$$x_i \geq 0, \bar{\gamma} > 0.$$

Для  $\bar{\gamma} > 0$  необходимо, чтобы все  $\bar{\gamma}_j$  были положительными. Это обеспечивается, если все  $a_{ij} \geq 0$ . Поэтому, если в матрице есть отрицательные элементы, увеличим все элементы  $\|a_{ij}\|$  на  $C = \text{abs}(\min_{i,j}(a_{ij}))$ . При этом  $\bar{\gamma}$  также увеличивается на  $C$ .

В результате решения поставленной задачи линейного программирования найдем  $x_i^*$  и значение целевой функции  $\sum_{i=1}^n x_i^*$ . После чего можем определить искомые  $P_{ia}^*$  по формуле:

$$P_{ia}^* = \frac{x_a^*}{\sum_{k=1}^n x_k^*}.$$

Выигрыш игрока  $A$  (цена игры) будет равен:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^*} - C.$$

*Алгоритм решения игры  $n \times m$  для участника  $A$*

1. Переходим к положительным элементам матрицы:  $a_{ij} + C$ .
2. Решаем задачу линейного программирования:

$$\min \sum_{i=1}^n x_i;$$

при ограничениях  $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i \geq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m), x_i \geq 0$ .

3. Находим вероятности:  $P_{ia}^* = \frac{x_i^*}{ЦФ}$  ( $ЦФ$  – значение целевой функции).

Выигрыш участника  $A$  определяется в соответствии с выражением:  $\gamma = \frac{1}{ЦФ} - C$ .

### **Решение игры для игрока $B$**

Перейдем к матрице  $\|a_{ij}\|$  с неотрицательными элементами так же как и при решении для участника  $A$ . Через  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) обозначим проигрыш игрока  $B$  при фиксированной стратегии игрока  $A$ :

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} P_{jb}.$$

Для вероятностей  $P_{jb}$  выполняется условие:  $\sum_{j=1}^m P_{jb} = 1$ .

Введем обозначение  $\tilde{\gamma} = \max_i \gamma_i$ . Задача минимизации  $\tilde{\gamma}$  эквивалентна поиску  $\max \frac{1}{\tilde{\gamma}}$ . Произведем замену переменных:

$$y_j = \frac{P_{jb}}{\tilde{\gamma}}.$$

Получаем задачу линейного программирования:

$$\max \sum_{j=1}^m y_j = \frac{1}{\tilde{\gamma}}$$

при ограничениях:  $\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq 1$  (при  $y_j \geq 0$ ).

Решив задачу линейного программирования, получим  $\gamma^*$  и значение целевой функции ( $\text{ЦФ}$ ). Цена игры –  $\tilde{\gamma} = \frac{1}{\text{ЦФ}}$ , а искомые вероятности –  $P_{jb}^* = y_j^* \cdot \tilde{\gamma}$ .

*Алгоритм решения игры  $n \times m$  для участника В*

1. Переходим к положительным элементам платежной матрицы:

$$a_{ij} + C.$$

2. Решаем задачу линейного программирования:

$$\max \sum_{j=1}^m y_j;$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad y_j \geq 0.$$

3. Интерпретируем результаты:

$$\gamma = \frac{1}{\text{ЦФ}}, P_{jb}^* = y_j^* \cdot \gamma.$$

4. Корректируем  $\gamma$ :

$$\gamma - C.$$

Вернемся к теореме о минимаксе (см. п. 2.3).

**Теорема о минимаксе.** В матричной игре без седловой точки ( $\alpha < \beta$ ) существует точка равновесия такая, что  $a_A > \alpha, a_A < \beta$ , и оптимальные решения для участников находятся из условий:

для  $A - \{P_{ia}^*\}$  из условия  $\max \left( \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} P_{ia} \right),$

для  $B - \{P_{jb}^*\}$  из условия  $\min \left( \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} P_{jb} \right),$

$a_A = a_B = \gamma$  – цена игры.

*Доказательство.*

В соответствии с рассмотренным алгоритмом существует решение для участника  $A$   $\mathbf{P}_a^*$ , определяемое из условия:

$$\max \left[ \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} P_{ia} \right] = a_A;$$

и существует решение для участника  $B$   $\mathbf{P}_b^*$ , определяемое из условия:

$$\min \left[ \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} P_{jb} \right] = a_B.$$

Из теоремы о прямой и двойственной задачах линейного программирования следует, что  $a_A = a_B$ .

## 2.4. Биматричные игры

В биматричных играх задаются матрицы выигрышей для обоих участников:

$\|a_{ij}\|$  – матрица  $n \times m$  выигрыша для игрока  $A$

$\|b_{ij}\|$  – матрица  $n \times m$  выигрыша для игрока  $B$ .

Необходимо найти оптимальные смешанные стратегии  $\mathbf{P}_a^*$  и  $\mathbf{P}_b^*$ .

### 2.4.1. Принципы решения биматричных игр

Пусть  $S_a = \mathbf{P}_a$  – стратегия для игрока  $A$ , а  $S_b = \mathbf{P}_b$  – стратегия для игрока  $B$ .

*Определение 3 (приемлемая стратегия)* Смешанная стратегия  $S_a$  является приемлемой для игрока  $A$ , если для любой другой смешанной стратегии  $S'_a$  и фиксированной смешанной стратегии  $S_b$  полезность для игрока  $A$  стратегии  $S_a$  больше, чем полезность стратегии

$S'_a$ . Таким образом, для любой смешанной стратегии  $S_b$  можно определить приемлемую стратегию  $S_a$ .

Можно условно графически представить зависимость приемлемой стратегии  $S_a$  как функцию от  $S_b$ , представленной на рис. 2.5.

Смешанная стратегия  $S_b$  игрока  $B$  является *приемлемой*, если при любой другой смешанной стратегии  $S'_b$  и фиксированной смешанной стратегии  $S_a$  выполняется:

$$b(S_a, S_b) \geq b(S_a, S'_b).$$

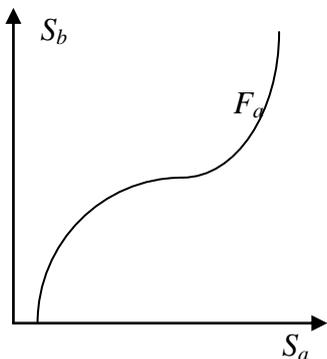


Рис. 2.5. Множество приемлемых стратегий для участника  $A$

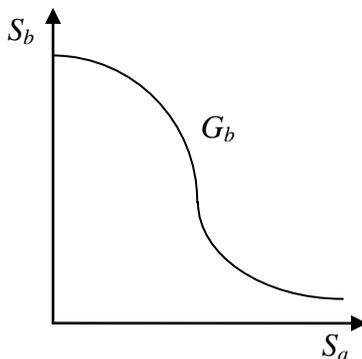


Рис. 2.6. Множество приемлемых стратегий для участника  $B$

Зависимость приемлемой стратегии  $S_b$  от  $S_a$  также можно условно представить в виде функции  $G_b$  (рис. 2.6).

Пересечение двух множеств  $F_a$  и  $G_b$  дает решение биматричной игры (рис. 2.7):

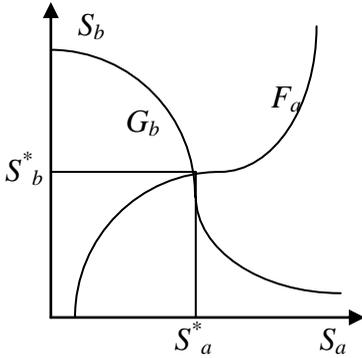


Рис. 2.7. Определение оптимальных смешанных стратегий

Проиллюстрируем принцип решения биматричных игр на задаче размерности  $2 \times 2$ .

#### 2.4.2. Решение биматричных игр $2 \times 2$

В качестве исходных данных заданы две матрицы:

$$\|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} S_{1b} & S_{2b} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} S_{1a} \\ S_{2a} \end{matrix},$$

$$\|b_{ij}\| = \begin{vmatrix} S_{1b} & S_{2b} \\ b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} S_{1a} \\ S_{2a} \end{matrix}.$$

Смешанные стратегии для  $A$ :  $S_a = \begin{pmatrix} P_{1a} \\ P_{2a} \end{pmatrix}$ , для  $B$ :

$$S_b = \begin{pmatrix} P_{1b} \\ P_{2b} \end{pmatrix}.$$

Выигрыш участника  $A$  равен:

$$a \langle S_a, S_b \rangle \supseteq a_{11}P_{1a}P_{1b} + a_{12}P_{1a}P_{2b} + a_{21}P_{2a}P_{1b} + a_{22}P_{2a}P_{2b}.$$

С учетом  $P_{2a} = 1 - P_{1a}$  и  $P_{2b} = 1 - P_{1b}$ :

$$\begin{aligned} a \langle S_a, S_b \rangle &\supseteq a_{11}P_{1a}P_{1b} + a_{12}P_{1a} \langle -P_{1b} \rangle \\ &+ a_{21} \langle -P_{1a} \rangle P_{1b} + a_{22} \langle -P_{1a} \rangle \langle -P_{1b} \rangle. \end{aligned}$$

После упрощения получим:

$$\begin{aligned} a \langle S_a, S_b \rangle &\supseteq P_{1a} \left[ P_{1b} \langle a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \rangle a_{12} - a_{22} \right] \\ &+ P_{1b} \langle a_{21} - a_{22} \rangle a_{22}. \end{aligned}$$

Так как в нашем случае смешанная стратегия  $S_a$  определяется одной вероятностью  $P_{1a}$ , а  $S_b - P_{1b}$ , то условие приемлемой стратегии для  $S_a$  запишется в виде:

$$a \langle P_{1a}, P_{1b} \rangle \supseteq a \langle P_{1a}, P_{1b} \rangle.$$

Чистая стратегия  $S_{1a}$  будет приемлемой (лучшей), когда  $P_{1a} = 1$  или когда

$$P_{1b} \langle a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \rangle a_{12} - a_{22} \geq 0.$$

Из данного неравенства можем сделать вывод, что чистая стратегия  $S_{1a}$  - приемлемая, если  $P_{1b} \geq P_{1b}^*$ :

$$P_{1b} \geq \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = P_{1b}^*$$

при знаменателе  $C = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} > 0$ .

Если же  $C < 0$ , то тогда  $P_{1b} \leq \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$ , и  $S_{1a}$  - приемлемая при  $P_{1b} \leq P_{1b}^*$ .

Напротив, стратегия  $S_{2a}$  приемлема при  $P_{1a} = 0$ , т.е. при условии, что

$$P_{1b} \left( a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \right) a_{12} - a_{21} \leq 0.$$

Таким образом, при  $C > 0$  стратегия  $S_{2a}$  приемлема, если

$$P_{1b} \leq P_{1b}^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \text{ а при } C < 0 \text{ – если } P_{1b} \geq P_{1b}^*.$$

На рис. 2.8 приведены зависимости при  $C > 0$  и  $C < 0$ .

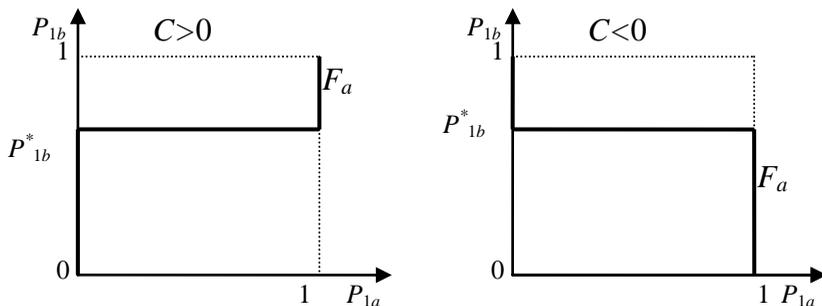


Рис. 2.8. Множество приемлемых стратегий для участника  $A$

Для построения  $G_b \left( S_{1a}, S_{1b} \right)$  запишем выражение для выигрыша участника  $B$ :

$$b \left( S_a, S_b \right) = b_{11} P_{1a} P_{1b} + b_{12} P_{1a} P_{2b} + b_{21} P_{2a} P_{1b} + b_{22} P_{2a} P_{2b};$$

$$P_{2a} = 1 - P_{1a}; P_{2b} = 1 - P_{1b};$$

$$b \left( S_a, S_b \right) = P_{1b} \left[ P_{1a} \left( b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21} \right) - b_{21} - b_{22} \right] + P_{1a} \left( b_{12} - b_{22} \right) - b_{22}.$$

Чистая стратегия  $S_{1b}$  – приемлемая  $\left( P_{1b} = 1 \right)$ , если

$$P_{1a} \left( b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21} \right) - b_{21} - b_{22} \geq 0$$

$$\text{или } P_{1a} \geq \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}} = P_{1a}^*,$$

при условии, что знаменатель  $D = b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21} > 0$ .

Если  $D < 0$ , то чистая стратегия  $S_{1b}$  приемлема при

$$P_{1a} \leq \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}} = P_{1a}^*.$$

На рис. 2.9 приведены зависимости  $G_b(P_{1a}, P_{1b})$  при  $D > 0$  и  $D < 0$ .

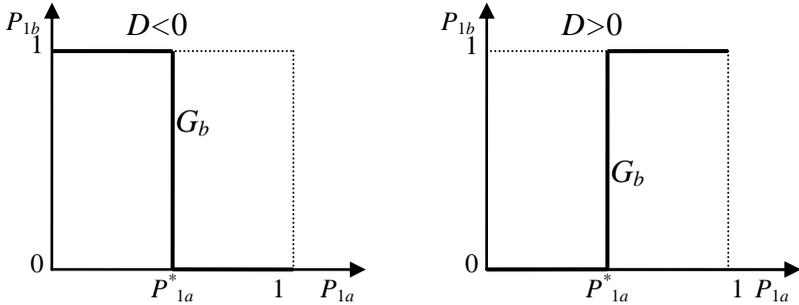
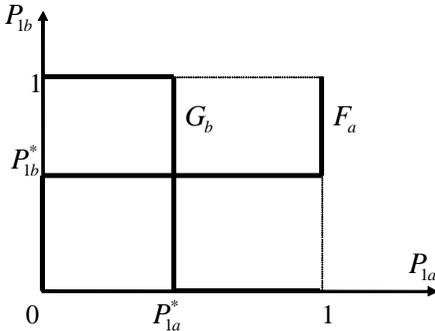


Рис. 2.9. Множество приемлемых стратегий для участника  $B$

Решением биматричной игры будет пересечение  $F_a$  и  $G_b$ .

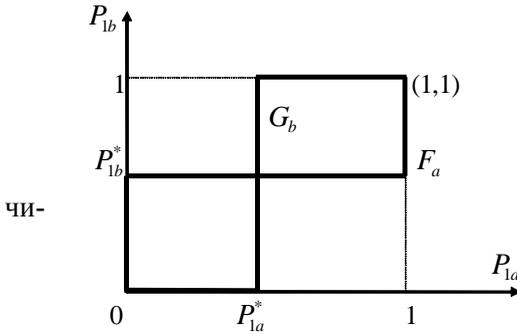
Возможны четыре варианта пересечения  $F_a$  и  $G_b$  (в зависимости от знаков  $C$  и  $D$ ).

### Первый вариант



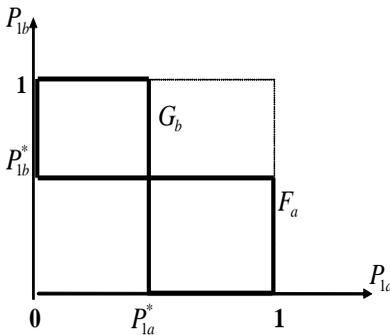
$C > 0, D < 0$ . Решение единственное —  $P_{1a}^*, P_{1b}^*$ .

**Второй вариант**



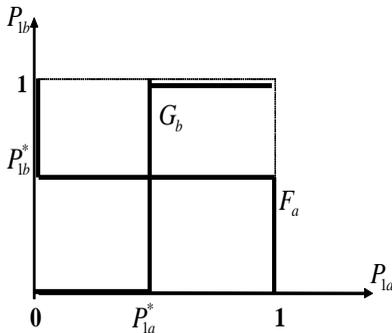
$C > 0, D > 0$ . Решением будет  $P_{1a}^*, P_{1b}^*$ , точки пересечения  $(1,1)$  и  $(0,0)$  – неустойчивы.

**Третий вариант**



$C < 0, D < 0$ . Решением будет  $P_{1a}^*, P_{1b}^*$ . Точки  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  дают неустойчивые решения.

**Четвертый вариант**



$C < 0, D > 0$ . Решение единственное –  $P_{1a}^*, P_{1b}^*$ .

**Пример решения биматричной игры.** Для каждого участника задана матрица выигрышей:

$$\|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, \quad \|b_{ij}\| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Находим оптимальные смешанные стратегии:

$$P_b^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{6 + 1}{3 + 6 - 1 + 1} = \frac{7}{9}, \quad C > 0;$$

$$P_a^* = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}} = \frac{3 + 1}{6 + 3 + 1} = \frac{2}{5}, \quad D > 0.$$

Рассчитываем выигрыши участников игры:

$$\gamma_a = a(S_a^*, S_b^*) = a_{11}P_{1a}^*P_{1b}^* + a_{12}P_{1a}^*P_{2b}^* + a_{21}P_{2a}^*P_{1b}^* + a_{22}P_{2a}^*P_{2b}^*;$$

$$\gamma_a = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{9} - 1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} + 6 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{103}{45};$$

$$\gamma_b = -6 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{9} + 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{9} - 1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} + 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{123}{45}.$$

Отметим, что принцип нахождения оптимальной смешанной стратегии для игрока  $A$  – минимизация выигрыша противника, и для участника  $B$  – тоже минимизация выигрыша противника. Этот принцип распространим для решения игр размерности  $n \times m$ .

### 2.4.3. Решение биматричных игр $n \times m$

Даны две матрицы выигрышей  $\|a_{ij}\|$  и  $\|b_{ij}\|$  размерности  $n \times m$ .

Необходимо найти оптимальные смешанные стратегии:

$$S_a^* = \{P_{ia}^*\} \quad \text{и} \quad S_b^* = \{P_{jb}^*\}.$$

Оптимальную смешанную стратегию  $\{P_{ia}^*\}$  находим из условия минимизации выигрыша противника  $\min \gamma_b$ , а  $\{P_{jb}^*\}$  – из условия минимизации выигрыша противника  $\min \gamma_a$ .

Для нахождения  $\{P_{ia}^*\}$  ставим задачу линейного программирования:

$$\max \sum_{i=1}^n x_i .$$

при ограничениях  $\sum_{i=1}^n b_{ij}x_i \leq 1 (j = 1, 2, \dots, m), x_i > 0$ .

На основе найденных  $x_i^*$  вычисляем  $\{P_{ia}^*\}$  (см. п. 2.3, решение матричных игр  $n \times m$ ).

Для нахождения  $\{P_{jb}^*\}$  ставим задачу линейного программирования:

$$\max \sum_{j=1}^m y_j$$

при ограничениях:  $\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j \leq 1 (i = 1, 2, \dots, n), y_j \geq 0$ .

На основе найденных  $y_j^*$  вычисляем  $\{P_{jb}^*\}$  (см. п. 2.3. решение матричных игр  $n \times m$ ).

Выигрыши участников определяются с использованием их матриц выигрышей:

$$\gamma_a = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} P_{ia}^* P_{jb}^*, \quad \gamma_b = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} P_{ia}^* P_{jb}^* .$$

Следует сказать, что матричные (антагонистические) игры являются частным случаем биматричных игр, поэтому для их решения можно использовать принцип решения биматричных игр.

Следует также отметить, что принцип решения биматричных игр может использоваться для решения игр с тремя и более участниками. Чтобы это продемонстрировать, рассмотрим решение диадических игр с тремя участниками.

## 2.5. Диадические игры

Игры, в которых каждому участнику предоставляется только две чистые стратегии, называются *диадическими*. Участник  $A$ :  $S_{1a}, S_{2a}$ , участник  $B$ :  $S_{1b}, S_{2b}$ , участник  $C$ :  $S_{1c}, S_{2c}$ .

В диадических играх смешанная стратегия участника  $A$  описывается вероятностью  $P_{1a}$ , так как  $P_{2a} = 1 - P_{1a}$ . Поэтому решить диадическую игру – значит найти оптимальные  $P_{1a}^*, P_{1b}^*, P_{1c}^*$ .

Продемонстрируем метод решения диадических игр на примере из [2]. Имеются предприятия:  $A$ ,  $B$  и  $C$ , осуществляющие сброс воды в один водоем. Каждый из них имеет две чистые стратегии:

$S_{1a}, S_{1b}, S_{1c}$  – используют очистные сооружения;

$S_{2a}, S_{2b}, S_{2c}$  – не используют очистные сооружения.

Водоем такой, что если два или более предприятий сбрасывают неочищенную воду, то вода загрязняется выше нормы, и все предприятия платят штраф (-3). Использование очистных средств обходится предприятию в (-1).

Для каждого из участников должны быть заданы матрицы полезности:  $\|a_{ijk}\|$ ,  $\|b_{ijk}\|$ ,  $\|c_{ijk}\|$ .

Удобно представить эти матрицы графически на кубе (рис. 2.10).

Углы куба – возможные исходы (в скобках указаны расходы трех предприятий при соответствующем исходе  $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}$ ).

Зафиксируем стратегии участников  $B$  и  $C$

$$S_b \equiv P_{1b}, P_{2b} \quad S_c \equiv P_{1c}, P_{2c} .$$

Приемлемая смешанная стратегия  $S_a$  – это лучшая стратегия для участника  $A$  при фиксированных  $S_b, S_c$ .

$F_a(S_b, S_c)$  – зависимость приемлемой стратегии  $S_a$  от  $S_b, S_c$ ,

$G_b(S_a, S_c)$  – зависимость приемлемой стратегии  $S_b$  от  $S_a, S_c$ ,

$H_c(S_a, S_b)$  – зависимость приемлемой стратегии  $S_c$  от  $S_a, S_b$ .

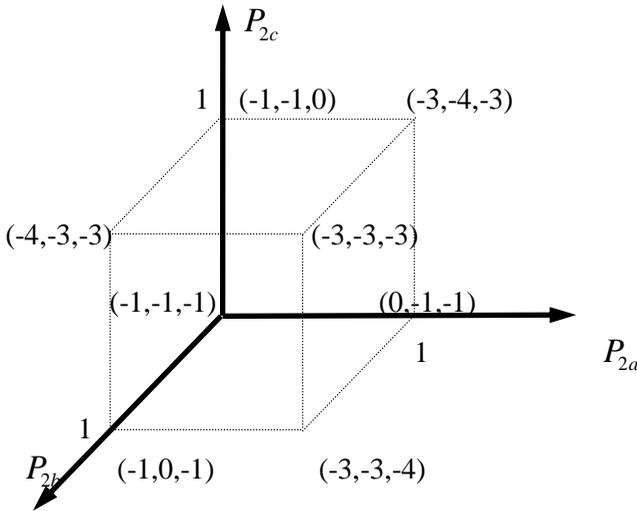


Рис. 2.10. Графическое представление матриц полезностей для участников

Найдем оптимальные стратегии для всех участников на пересечении этих функций. Построим эти функции для нашего примера. Так как у нас в примере игра симметричная, то достаточно построить одну зависимость  $F_a(S_b, S_c)$ .

При первой чистой стратегии  $(S_{1a} = 1)$  выигрыш будет:

$$a_{111}P_{1b}P_{1c} + a_{112}P_{1b}P_{2c} + a_{121}P_{2b}P_{1c} + a_{122}P_{2b}P_{2c},$$

а при второй чистой стратегии  $(S_{2a} = 1)$ :

$$a_{211}P_{1b}P_{1c} + a_{212}P_{1b}P_{2c} + a_{221}P_{2b}P_{1c} + a_{222}P_{2b}P_{2c}.$$

Чтобы первая стратегия была приемлемой, она должна быть лучше второй, поэтому первый выигрыш должен быть не хуже второго.

Сгруппируем слагаемые:

$$(a_{111} - a_{211})P_{1b}P_{1c} + (a_{112} - a_{212})P_{1b}P_{2c} + (a_{121} - a_{221})P_{2b}P_{1c} + (a_{122} - a_{222})P_{2b}P_{2c} \geq 0.$$

С учетом, что  $P_{2b} = 1 - P_{1b}$ ,  $P_{2c} = 1 - P_{1c}$ , получим условие когда  $S_{1a}$  – приемлемая:

$$\begin{aligned} & P_{1b} P_{1c} \{ a_{111} - a_{112} - a_{211} - a_{121} + a_{221} + a_{212} + a_{122} - a_{222} \} \\ & + P_{1b} \{ a_{121} - a_{221} - a_{122} + a_{222} \} P_{1c} \{ a_{211} - a_{221} - a_{212} + a_{222} \} \\ & + a_{122} - a_{222} \geq 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\alpha = a_{111} - a_{112} - a_{211} - a_{121} + a_{221} + a_{212} + a_{122} - a_{222};$$

$$\beta = a_{121} - a_{221} - a_{122} + a_{222};$$

$$\gamma = a_{221} - a_{221} - a_{212} + a_{222};$$

$$\eta = a_{122} - a_{222}.$$

С учетом обозначений получим неравенство:

$$\alpha P_{1b} P_{1c} + \beta P_{1b} + \gamma P_{1c} + \eta \geq 0.$$

В нашем примере:

$$\alpha = -3 + 4 + 3 + 3 - 0 - 1 - 1 + 1 = 6;$$

$$\beta = \gamma = -3 - 0 + 1 - 1 = -3;$$

$$\eta = 1.$$

Получаем неравенство, определяющее соотношения между  $P_{1b}$  и  $P_{1c}$ , когда  $P_{1a} = 1$  будет приемлемой стратегией:

$$6P_{1b} P_{1c} - 3P_{1b} - 3P_{1c} + 1 \geq 0.$$

Отсюда получаем области:  $P_{1c} \geq \frac{-1 + 3P_{1b}}{6P_{1b} - 3}$ , показанные на рис.

2.11.

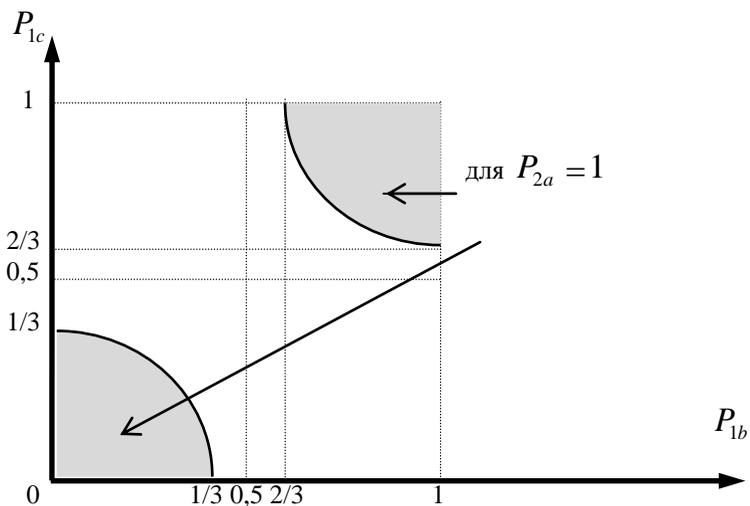


Рис. 2.11. Множество приемлемых стратегий для участника  $A$  при  $P_{2a} = 1$

На рис. 2.12 приведена зависимость  $F_a(P_{1b}, P_{1c})$ :

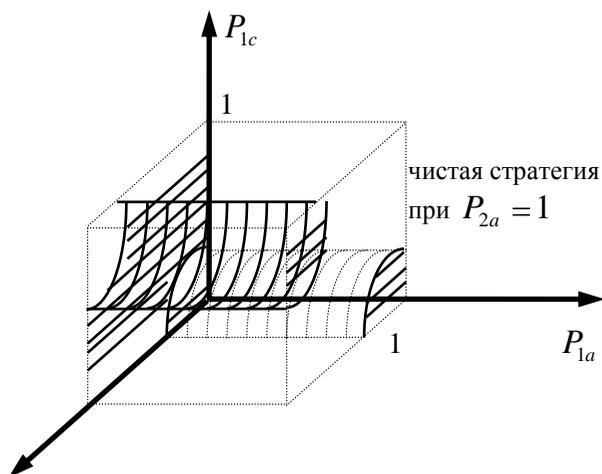


Рис. 2.12. Множество приемлемых стратегий для участника  $A$

Аналогично будут выглядеть зависимости  $G_b(P_a, P_{1c})$  и  $H_c(P_{1a}, P_{1b})$  для участников  $B$  и  $C$ .

Результат пересечения  $F_a, G_b$  и  $H_c$  приведен на рис. 2.13:

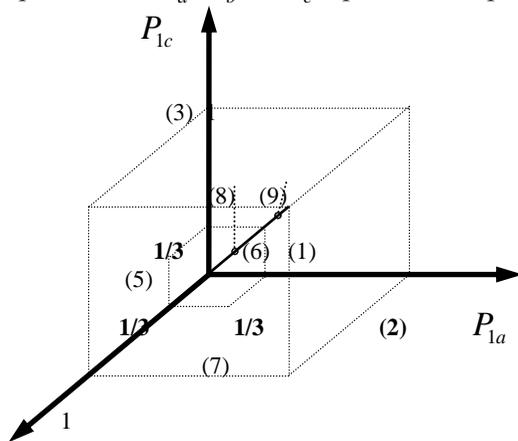


Рис. 2.13. Пересечение множеств приемлемых стратегий

*Интерпретация решения.* Точка (1) соответствует ситуации безнадёжности, когда все фирмы не строят очистные сооружения.

Точки (2), (3), (4) – наличие "нахала" – две фирмы строят, а одна – нет.

Точки (5), (6), (7) соответствуют тому, что один строит очистительные сооружения, а два других уменьшают свои сбросы (сознательное природопользование):

$$\left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\} (5)$$

$$\left\{ \frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3} \right\} (6)$$

$$\left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0 \right\} (7)$$

Точки (8), (9) находятся на диагонали куба, и их координаты получают из условия:

$$6P_{1b}P_{1c} - 3P_{1b} - 3P_{1c} + 1 = 0.$$

Из-за симметрии  $P_{1b} = P_{1c} = x$ , и получается уравнение:

$$6x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x_1 = 0,211$$

$$x_2 = 0,789.$$

Точка 8 = {0,211; 0,211; 0,211} – справедливое решение, а точка 9 {0,789; 0,789; 0,789} – ближе к безнадёжной точке (1).

## 2.6. Коалиционные игры

В отличие от ранее рассмотренных классов задач, коалиционные игры решают задачу формирования оптимальных коалиций, выбора каждым из участников партнеров для сотрудничества.

Пусть имеется  $m$  участников:

$A, B, C, \dots, m$ .

Рассмотрим возможные стратегии сотрудничества:

$S_1$  – каждый из участников действует независимо от других;

$S_{\langle 1,2 \rangle}$  – коалиция из двух участников, первого и второго;

$S_{\langle 1,3 \rangle}$  – коалиция первого и третьего участников;

$S_{\langle 2,3 \rangle}$  – коалиция второго и третьего участников;

$S_{\langle 1,2,3 \rangle}$  – коалиция из трех участников.

Общее число возможных коалиций и, соответственно, стратегий равно  $2^m - (n-1)$ . Для задания выигрышей при разных коалициях используется характеристическая функция. Например,

$$\begin{array}{cccccccc} U_0 & U_1^1 & U_1^2 & U_1^3 & U_{\langle 1,2 \rangle} & U_{\langle 1,3 \rangle} & U_{\langle 2,3 \rangle} & U_{\langle 1,2,3 \rangle} \\ 0 & 10 & 12 & 15 & 25 & 30 & 30 & 45 \end{array}$$

$U_1^i$  – выигрыш участников при стратегии  $S_1$

$U_{\langle 1,2 \rangle}$  – если первый и второй участники вступят в коалицию, то их общий выигрыш составит 25 и т.д.

$U_{\langle 1,2,3 \rangle}$  – выигрыш трех участников, если они все вступят в коалицию.

Таким образом, чтобы описать коалиционную игру, необходимо задать характеристическую функцию.

Характеристическая функция должна обладать свойством супераддитивности. Для любой пары непересекающихся коалиций должно выполняться неравенство:

$$\forall K_j, K_l : K_j \cap K_l = \emptyset \Rightarrow U_{K_j} + U_{K_l} \leq U_{K_j \cup K_l}.$$

Неравенство может быть и обратное – это означает, что в качестве выигрыша выступают затраты, убытки, и стоит задача выбора партнеров, чтобы уменьшить затраты, т.е. стоит задача минимизации целевой функции. Для этой постановки все рассматриваемые далее вопросы и процедуры тоже справедливы.

Если  $U_{K_j} + U_{K_l} = U_{K_j \cup K_l}$ , то такая игра незначительна, так как нет смысла вступать в коалиции.

Для решения игры необходимо составить матрицу выигрышей для каждого участника при разных стратегиях (коалициях) в следующем виде:

	$S_1$	$S_{\langle 1,2 \rangle}$	$S_{\langle 1,3 \rangle}$	$S_{\langle 2,3 \rangle}$	$S_{\langle 1,2,3 \rangle}$
$A$	$U_1^1$	$U_{\langle 1,2 \rangle}^1$	$U_{\langle 1,3 \rangle}^1$	$U_1^1$	$U_{\langle 1,2,3 \rangle}^1$
$B$	$U_1^2$	$U_{\langle 1,2 \rangle}^2$	$U_1^2$	$U_{\langle 2,3 \rangle}^2$	$U_{\langle 1,2,3 \rangle}^2$
$C$	$U_1^3$	$U_1^3$	$U_{\langle 1,3 \rangle}^3$	$U_{\langle 2,3 \rangle}^3$	$U_{\langle 1,2,3 \rangle}^3$

где  $U_{\langle 1,2 \rangle}^1$  – выигрыш участника  $A$  в коалиции  $(1, 2)$ ,  $U_{\langle 1,2 \rangle}^2$  – выигрыш участника  $B$  в коалиции  $(1, 2)$  и т.д. При этом

$$U_{\langle 1,2 \rangle} = U_{\langle 1,2 \rangle}^1 + U_{\langle 1,2 \rangle}^2.$$

Видим, что при определении выигрышей участников коалиций возникает проблема дележа.

### Проблема дележа выигрыша между участниками коалиции

Решение этой проблемы может осуществляться разными способами: переговоры, привлечение сторонних лиц и др., но лучше исполь-

звать алгоритмическое решение проблемы дележа. Тогда имеется возможность каждому участнику независимо от других выявить потенциальные коалиции и вступить с ними в переговоры.

Рассмотрим принципы алгоритма справедливого дележа:

а) участник, присоединившийся к коалиции, но не приносящий ей пользу, ничего не выигрывает. Другими словами, если к коалиции присоединяем  $i$ -го участника и он не увеличивает выигрыш коалиции, т.е.  $U_{\langle K_j \cup i \rangle} = U_{\langle K_j \rangle}$  то выигрыш участника  $i$  равен нулю:

$$U_{\langle K_j \cup i \rangle}^i = 0;$$

б) сумма выигрышей участников коалиции равна общему выигрышу коалиции:

$$\sum_{i \in K_j} U_{\langle K_j \rangle}^i = U_{\langle K_j \rangle}.$$

Используя принцип (а), составим для коалиции  $K$  из  $n$  участников формулу дележа общего выигрыша  $U_K$ .

Для участника  $i$  коалиции выберем все возможные внутренние коалиции  $K_j$  из  $n_j$  участников, не включающие участника  $i$ ,  $K_j \in K$ . Таких внутренних  $K_j$  будет —  $C_{n-1}^{n_j}$  (сочетание из  $n-1$  участников по  $n_j$ ). Усредним полезность участника  $i$  в коалициях с  $K_j$  (число участников в коалициях  $K_j$  одинаково и равно  $n_j$ , а вместе с участником  $i$  коалиции будут  $K_j \cup i$ ).

$$\frac{1}{C_{n-1}^{n_j}} \sum_{K_j \in K} (U_{K_j \cup i} - U_{K_j});$$

$$n_j = \text{const}$$

Если рассмотреть коалиции с числом участников  $n_j = 0, 1, \dots, n-1$ , то тем самым охватим все возможные коалиции, которые могут быть внутренними по отношению к общей коалиции  $K$ .

Усредняя полезность участника  $i$  уже во всех возможных коалициях, получим формулу его выигрыша:

$$U_K^i = \frac{1}{n} \sum_{n_j=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{C_{n-1}^{n_j}} \sum_{\substack{K_j \in K \\ n_j = \text{const}}} (U_{K_j \cup i} - U_{K_j}) \right\}. \quad (2.9)$$

Выигрыши участников коалиции  $\mathcal{U}_K^i$ , вычисляемые по формуле (2.9), называют *вектором Шепли*.

Кроме свойства (б), вектор Шепли обладает еще свойством аддитивности.

Пусть задана характеристическая функция

$$I: U_0, U_1, U_2, U_3, U_{\langle 1,2 \rangle}, \dots, U_{\langle 1,2,3 \rangle}, \dots,$$

в которой выигрыш участника  $i$  в коалиции  $K$  равен  $U_K^i$ , и вторая характеристическая функция  $II$ , в которой выигрыш участника  $i$  равен  $U_K^i$ . Если сформировать третью характеристическую функцию  $III$ , элементами которой будут суммы соответствующих элементов функций  $I$  и  $II$ , то выигрыш участника  $i$  будет равен

$$U_K^i(III) = U_K^i(I) + U_K^i(II).$$

Данное свойство весьма полезно на практике, так как сотрудничество участников может быть по нескольким областям их деятельности. Тогда по каждой области деятельности может быть составлена своя характеристическая функция. Дележи могут проводиться по каждой отдельной области совместной деятельности или вместе по всем областям. Но оценивать полезность коалиций необходимо по сумме всех областей совместной деятельности.

Для выбора каждым участником лучшей стратегии необходимо выбрать максимальный выигрыш (см. таблицу выигрышей). Если для нескольких участников игры стратегии совпадают, то эта коалиция и будет эффективна для ее участников.

Необходимо иметь в виду, что определение выигрышей по формуле (2.9) означает справедливый дележ. Поэтому при анализе ре-

зультурующей матрицы выигрышей можно отходить от вычисленных  $U_K^i$ , чтобы добиться устойчивого компромисса при дележе.

Рассмотрим последовательность решения коалиционной игры на примере характеристической функции, приведенной в начале данного раздела.

Вычислим выигрыши участников  $A, B, C$  в различных коалициях, используя формулу (2.9):

$$U_{(1,2)}^1 = \frac{1}{2} [V_1 - U_0 + U_{(1,2)} - U_2] = \frac{1}{2} [0 - 0 + 5 - 12] = 11,5, \\ U_{(1,2)}^2 = U_{(1,2)} - U_{(1,2)}^1 = 25 - 11,5 = 13,5,$$

$$U_{(1,3)}^1 = \frac{1}{2} [V_1 - U_0 + U_{(1,3)} - U_3] = \frac{1}{2} [0 - 0 + 6 - 15] = 12,5, \\ U_{(1,3)}^3 = U_{(1,3)} - U_{(1,3)}^1 = 30 - 12,5 = 17,5,$$

$$U_{(2,3)}^2 = \frac{1}{2} [V_2 - U_0 + U_{(2,3)} - U_3] = \frac{1}{2} [2 - 0 + 6 - 15] = 13,5, \\ U_{(2,3)}^3 = U_{(2,3)} - U_{(2,3)}^2 = 30 - 13,5 = 16,5,$$

$$U_{(1,2,3)}^1 = \frac{1}{3} \left[ \frac{U_1 - U_0}{C_2^0} + \frac{U_{(1,2)} - U_2}{C_2^1} + \frac{U_{(1,3)} - U_3}{C_2^2} + \frac{U_{(1,2,3)} - U_{(2,3)}}{C_2^3} \right] = \\ = \frac{1}{3} \left[ 0 - 0 + \frac{5 - 12}{2} + \frac{6 - 15}{2} + 45 - 30 \right] = 13,$$

$$U_{(1,2,3)}^2 = \frac{1}{3} \left[ 2 - 0 + \frac{5 - 10}{2} + \frac{6 - 15}{2} + 45 - 30 \right] = 14,$$

$$U_{(1,2,3)}^3 = U_{(1,2,3)} - U_{(1,2,3)}^1 - U_{(1,2,3)}^2 = 45 - 13 - 14 = 18.$$

Для выявления лучшей стратегии составим матрицу выигрышей:

	$S_1$	$S_{\langle 2 \rangle}$	$S_{\langle 3 \rangle}$	$S_{\langle 3 \rangle}$	$S_{\langle 2,3 \rangle}$	max
A	10	11,5	12,5	10	13	13
B	12	13,5	12	13,5	14	14
C	15	15	17,5	16,5	18	18

Так как максимальные выигрыши для всех участников соответствуют одной стратегии (коалиции), то  $S_{\langle 2,3 \rangle}$  и будет оптимальной.

### Вопросы и задачи

1. Сформируйте платежную матрицу с тремя седловыми точками.
2. Какие из множества чистых стратегий являются активными?
3. Какие из списка чистых стратегий являются доминируемыми, доминирующими? Какие из них могут входить в число активных стратегий?
4. Что такое приемлемая стратегия? Может ли быть чистая стратегия приемлемой?
5. Покажите, что использование принципа решения биматричных игр для матричных игр приводит к тем же результатам, что их решение с использованием теоремы о минимаксе.
6. Решите игру со следующей платежной матрицей:

	$S_{1b}$	$S_{2b}$	$S_{3b}$	$S_{4b}$
$S_{1a}$	6	-1	6	5
$S_{2a}$	3	2	4	2
$S_{3a}$	0	4	0	-2

7. На двух рынках  $S_1$  и  $S_2$  конкурируют две фирмы  $A$  и  $B$ . Матрицы выигрышей (прибыли) фирм  $A$  и  $B$  равны:

$$\|a_{i,j}\| = \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 30 & 25 \end{vmatrix}; \quad \|b_{i,j}\| = \begin{vmatrix} 15 & 30 \\ 20 & 18 \end{vmatrix}.$$

В каких пропорциях следует разделить суммы на рекламную кампанию на каждом из рынков фирме  $A$  и фирме  $B$ ?

8. Какие свойства присущи вектору Шепли в коалиционных играх?

9. Решите коалиционную игру для трех участников со следующей характеристической функцией:

$U_0$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_{(1,2)}$	$U_{(1,3)}$	$U_{(2,3)}$	$U_{(1,2,3)}$
0	10	15	11	20	18	20	26



### 3. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

#### 3.1. Постановка задач управления запасами

Задачи управления запасами связаны с оптимизацией процессов закупки продукции, ее хранения и реализации. Все эти процессы осуществляются в системе управления запасами, которые рассматриваются в логистике [7, 8]. Интерпретировать задачи управления запасами можно и в других областях, в том числе и производственной деятельности.

Пример изменения уровня запасов при неизменном спросе на продукцию приведен на рис. 3.1.

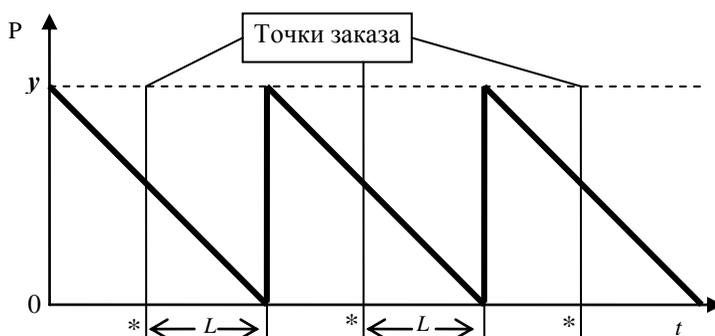


Рис. 3.1. График уровня запасов при постоянном спросе

Здесь  $P$  – уровень запасов,  $L$  – задержка во времени между оформлением и получением заказа (время выполнения заказа),  $y$  – размер заказа; угол между осью абсцисс и линией изменения запасов определяется  $\beta$  – спросом в единицу времени на продукцию.

Вопросы, которые ставятся в этих задачах:

найти точку заказа (момент времени, когда делать заказ);

определить размер заказа  $y$  (сколько заказывать продукции).

Кроме этого ставится задача оптимизации размера заказа. Целевая функция для оптимизации размера заказа – минимизация затрат в системе управления запасами:

$$F = C_{\text{приобр}} + C_{\text{разм}} + C_{\text{хран}} + C_{\text{дефиц}},$$

где  $C_{\text{приобр}}$  – стоимость приобретения товара (зависит от размера заказа);  $C_{\text{разм}}$  – затраты на размещение заказа (оформление заказа, транспортировка продукции заказа).  $C_{\text{разм}}$  зависит от частоты заказов;  $C_{\text{хран}}$  – затраты на хранение продукции на складе;  $C_{\text{дефиц}}$  – потери от дефицита продукции.

На рис. 3.2 приведены зависимости составляющих целевой функции от уровня запасов ( $P$ ).

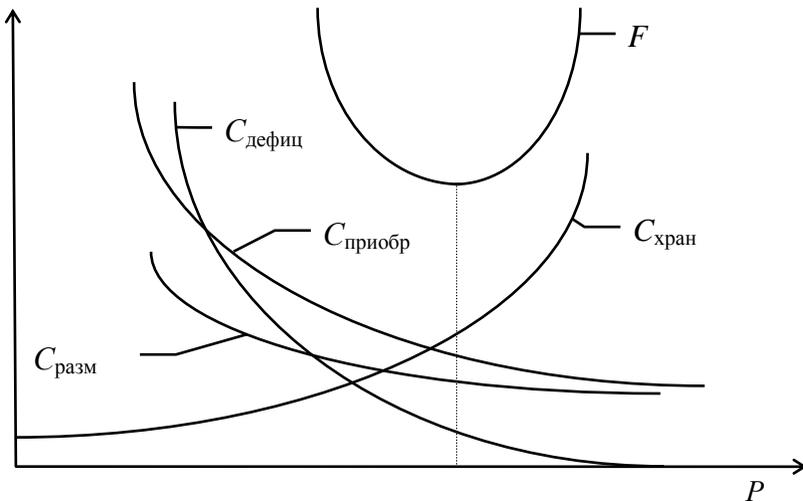


Рис. 3.2. Целевая функция для оптимизации размера заказа

В логистике выделяют несколько моделей управления запасами, основные из которых рассмотрены ниже.

*Модель с контролем уровня запасов  
(фиксированным размером заказа)*

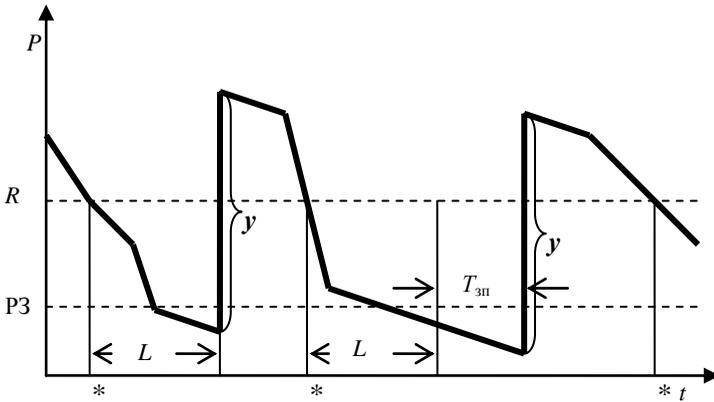


Рис. 3.3. График уровня запасов в системе с контролем уровня запасов

В этой модели точка заказа (на рис. 3.3 отмечены \*) определяется достижением уровня запасов ( $P$ ) порогового уровня ( $R$ ).  $L$  – время выполнения заказа (поставки продукции), может увеличиться по непредвиденным обстоятельствам на время возможной задержки заказа ( $T_{зп}$ ). По этой причине, а также из-за нестабильного (случайного) спроса в системе предусматривается резервный запас ( $PЗ$ ). Размер заказа ( $y$ ) в системе фиксирован. Пороговый уровень запасов ( $R$ ) определяется суммой уровня резервного запаса и произведения среднего спроса на продукцию в единицу времени ( $\beta$ ) на время выполнения заказа ( $L$ ).

Оптимизируются в данной модели размер заказа ( $y$ ) и уровень резервного запаса ( $PЗ$ ).

*Модель с фиксированным интервалом времени между заказами*

В данной модели точки заказа отстоят друг от друга на одинаковом интервале времени ( $T_{ивз}$ ). Размер заказа определяется на основании максимально желаемого уровня запасов ( $MЗП$ ) и уровня запасов с момента заказа:

$$y = s + \beta \cdot L,$$

где  $s$  – необходимый до МЗП размер заказа в момент заказа,  
 $\beta$  – средний спрос на продукцию в единицу времени,  
 $L$  – время выполнения заказа,

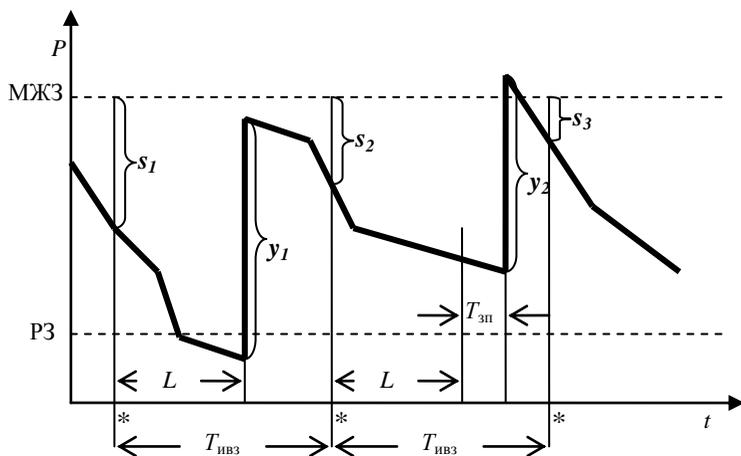


Рис. 3.4. График уровня запасов в системе с фиксированным интервалом времени между заказами

Интервал времени между заказами ( $T_{ивз}$ ) определяется из выражения:

$$T_{ивз} = (МЗП - РЗ) / \beta.$$

Точки заказа на рис. 3.4 отмечены \*.

Оптимизации подлежат максимально желаемый уровень запасов (МЗП) и уровень резервных запасов (РЗ).

#### *Модель с установленной периодичностью пополнения запасов до установленного уровня*

Данная модель объединяет принципы двух предыдущих моделей. В ней заказы делаются периодически (как во второй модели), но одновременно следят за уровнем запасов (как в первой). Если уровень запасов достигает порогового уровня, то делается дополнительный

заказ. На рис. 3.5 иллюстрируется функционирование системы управления запасами, основанной на этой модели.

Как и во второй модели оптимизации подлежат максимально желаемый уровень запасов и уровень резервных запасов.

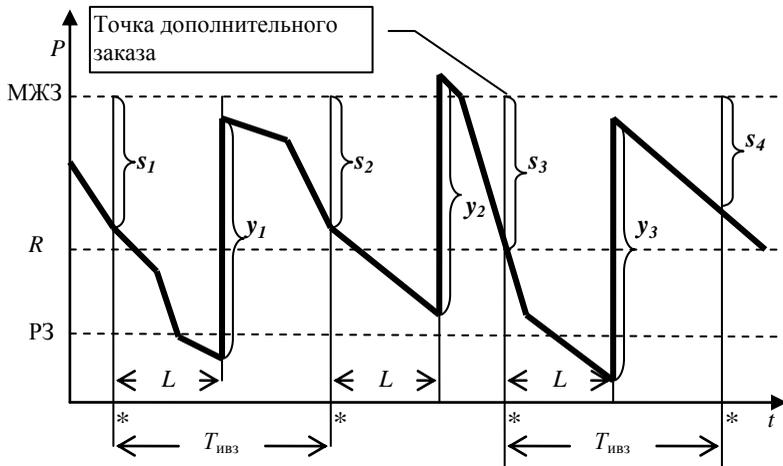


Рис. 3.5. График уровня запасов в системе с установленной периодичностью их пополнения

### Классификация моделей управления запасами.

В качестве основания для классификации используем основные параметры систем управления запасами: спрос на продукцию, характеристики выполнения заказа, период времени управления заказами.

1. Характеристики спроса на продукцию ( $\beta$ )
  - а) детерминированные (спрос – не случайная величина):
    - статические детерминированные модели ( $\beta = \text{const}$ );
    - динамические детерминированные модели ( $\beta(t)$  зависит от времени);
  - б) вероятностные (спрос – случайная величина):
    - стационарные вероятностные модели;
    - нестационарные вероятностные модели.

2. Время выполнения заказа ( $L$ ):
  - а) детерминированные ( $L = \text{const}$ );
  - б) вероятностные ( $L$  – случайная величина).
3. Характер выполнения заказа (поступления запаса)
  - а) заказ поступает полностью одновременно;
  - б) заказ поступает равномерно.
4. Период времени управления запасами:
  - а) конечный;
  - б) бесконечный.

Важным фактором является число видов продукции, управление запасами которых осуществляется. В этой связи выделяются:

- а) однопродуктовые модели;
- б) многопродуктовые модели.

В настоящем разделе рассматриваются несколько из указанных выше классов задач и соответствующие им модели, позволяющие оптимизировать характеристики систем управления запасами.

### 3.2. Детерминированные модели управления запасами

#### Детерминированная однопродуктовая статическая модель управления запасами

В модели задаются:

$\beta$  – const (спрос в единицу времени),

$L$  – const (время выполнения заказа),

$h$  – затраты на хранение 1 единицы продукции в единицу времени,

$K$  – затраты на размещение 1 заказа.

Так как все параметры постоянные, то дефицита продукции всегда можно избежать, значит, резервный запас не требуется. На рис. 3.5 приведен график изменения уровня запасов в этой простейшей модели.

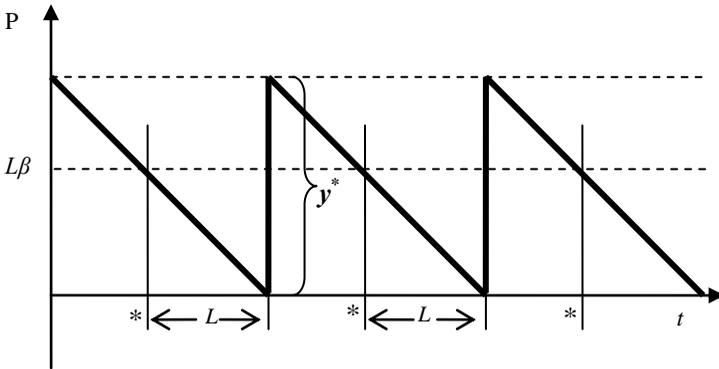


Рис. 3.6. График уровня запасов в модели

Составим целевую функцию системы управления запасами.

На достаточно большом интервале времени –  $T$  затраты на приобретение продукции равны  $C_{\text{приобр}} = q \cdot \beta \cdot T$ , где  $q$  – цена 1 ед. продукции;

$N_{\text{заказ}} = \frac{T\beta}{y}$  – число заказов за период  $T$ ;  $C_{\text{разм}} = KN_{\text{заказ}} = \frac{KT\beta}{y}$  –

затраты на размещение заказов.

Средний уровень запасов в течение  $T$  равен  $y/2$ , поэтому затраты на хранение продукции равны:

$$C_{\text{хран}} = h \frac{y}{2} T.$$

$C_{\text{дефиц}} = 0$ , так как дефицита нет.

Таким образом, общие затраты на функционирование системы управления запасами равны:

$$F(y) = T \left[ q\beta + \frac{K\beta}{y} + \frac{hy}{2} \right].$$

Для определения оптимального размера заказа приравняем производную  $F(y)$  к нулю:

$$\frac{dF}{dy} = T \left[ -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2} \right] = 0,$$

откуда получим формулу экономичного размера заказа (*формула Уилсона*):

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}. \quad (3.1)$$

Чтобы определить точку заказа, необходимо найти пороговый уровень запасов ( $L\beta$ ).

### Детерминированная статическая модель с разрывами цен

В отличие от предыдущей задачи будем считать, что цена продукции зависит от размера заказа:  $q = f(y)$ .

$$\text{Примем } f(y) = \begin{cases} q_1, & \text{если } y < r \\ q_2, & \text{если } y \geq r \text{ (льготные цены)} \end{cases} \quad q_2 < q_1,$$

где  $r$  – пороговый размер заказа, при котором делаются скидки.

Целевые функции приведенные на рис. 3.7 при разных ценах будут отличаться только затратами на приобретение продукции:

$$F_1 = T \left[ \beta q_1 + \frac{K\beta}{y} + \frac{hy}{2} \right], \quad F_2 = T \left[ \beta q_2 + \frac{K\beta}{y} + \frac{hy}{2} \right].$$

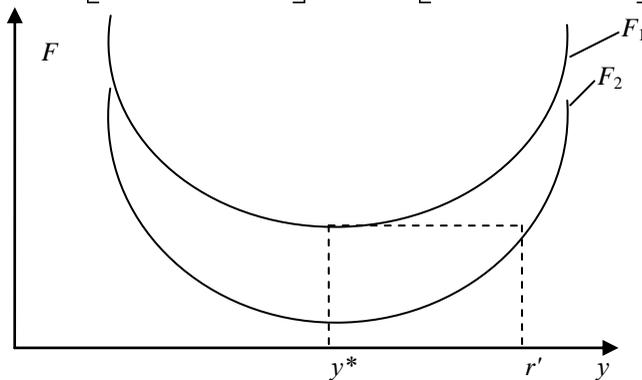


Рис. 3.7. Целевые функции для разных цен

Пояснения к рис. 3.7:

$r'$  – величина заказа, при которой  $F_1(y^*) = F_2(r')$ ,

$y^*$  – оптимальный уровень заказов.

Отметим, что при разных ценах  $y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$ .

Оптимальный размер заказа  $y_{opt}$  будет определяться исходя из соотношений между  $y^*$ ,  $r$  и  $r'$ .

Рассмотрим возможные случаи.

*Случай 1.* Пороговый размер заказа –  $r < y^*$ .

Целевая функция в этом случае имеет вид, представленный на рис. 3.8.

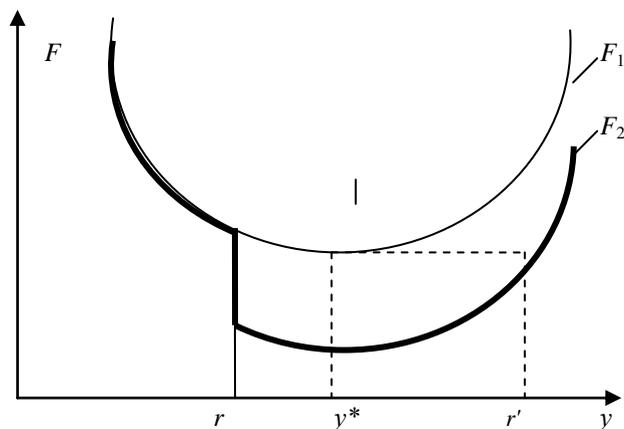


Рис. 3.8. Целевая функция при  $r < y^*$

Оптимальный размер заказа равен  $y_{opt} = y^*$ , а цена продукции равна  $q_2$ .

*Случай 2.* Пороговый размер заказа –  $y^* < r < r'$ .

Целевая функция для этого случая приведена на рис. 3.9.

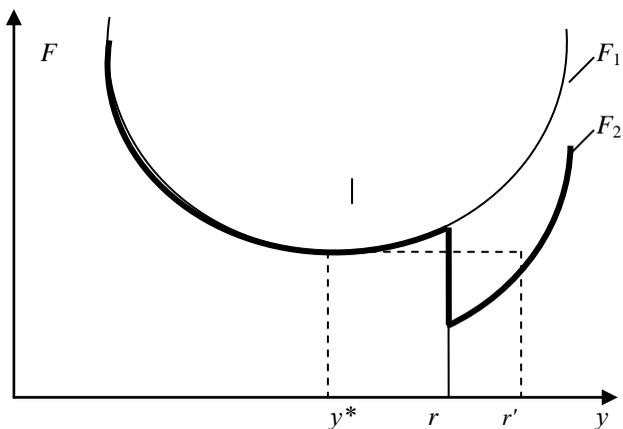


Рис. 3.9. Целевая функция при  $y^* < r < r'$

Оптимальный размер заказа равен  $y_{\text{опт}} = r$ , а цена продукции равна  $q_2$ .

*Случай 3.* Пороговый размер заказа –  $r \geq r'$

Целевая функция в этом случае имеет вид (рис.3.10):

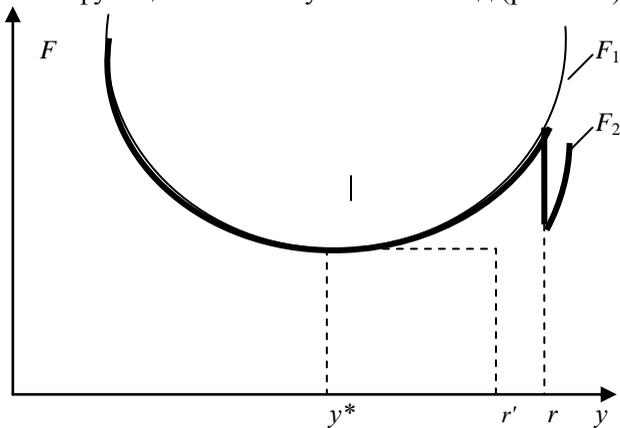


Рис. 3.10. Целевая функция при  $r \geq r'$

Оптимальный размер заказа равен  $y_{\text{опт}} = r$ , а цена равна  $q_2$ .

Получим уравнение для определения величины  $r'$ .

$$F_1(y) = T \left[ \beta q_1 + \frac{K\beta}{y} + \frac{hy}{2} \right].$$

Учитывая, что  $y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$ ,

$$F_1(y^*) = T \left[ \beta q_1 + \frac{K\beta\sqrt{h}}{\sqrt{2K\beta}} + \frac{h\sqrt{2K\beta}}{2\sqrt{h}} \right],$$

$$F_1(y^*) = T \left[ q_1\beta + \sqrt{2K\beta h} \right].$$

Условие для определения  $r'$ :  $F_1(y^*) = F_2(r')$ ,

$$q_1\beta + \sqrt{2K\beta h} = q_2\beta + \frac{K\beta}{r'} + \frac{hr'}{2}.$$

После упрощения получим уравнение для определения  $r'$ :

$$(r')^2 - 2r' \left[ \frac{\beta}{h} (q_1 - q_2) + \frac{\sqrt{2K\beta}}{h} \right] + \frac{2K\beta}{h} = 0.$$

С учетом  $y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$  уравнение переписывается в виде:

$$(r')^2 - 2r' \left[ \frac{\beta}{h} (q_1 - q_2) + y^* \right] + (y^*)^2 = 0.$$

### Многопродуктовая статическая модель с ограничением на емкость склада

Число видов продукции –  $n$ , индексы продукции –  $i=1, 2, \dots, n$ .  
Цены на все виды продукции неизменны. Для каждого вида продукции заданы:

$\beta_i$  – спрос в единицу времени,

$K_i$  – затраты на размещение заказа,

$h_i$  – затраты на хранение 1 ед. продукции в единицу времени.

Кроме этого заданы объемные характеристики одной единицы продукции каждого вида  $- a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), а также общая вместимость склада  $A$  (объем в  $\text{м}^3$  или площадь в  $\text{м}^2$ ).

Требуется определить оптимальные размеры заказов по каждому виду продукции  $y_i^*$ .

Целевая функция имеет вид:

$$F = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{K_i \beta_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} \right]$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i \leq A.$$

Для минимизации целевой функции воспользуемся методом Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$L(\lambda, y_1 \dots y_n) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{K_i \beta_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} \right] - \lambda \left( \sum_{i=1}^n a_i y_i - A \right),$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа (меньше нуля).

Для определения  $y_i^*$  составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dy_i} = -\frac{K_i \beta_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda a_i = 0 \\ \frac{dL}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n a_i y_i - A = 0 \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.2)$$

Из (3.2) получим

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \beta_i}{h_i - 2\lambda a_i}}, \quad \lambda \leq 0. \quad (3.3)$$

При  $\lambda = 0$  получаем задачу без ограничения:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \beta_i}{h_i}}.$$

Если при этом выполняется ограничение

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i^* \leq A, \quad (3.4)$$

то задача решена.

В случае невыполнения ограничения (3.4) систему уравнений решаем численными методами.

Для этого, на каждом шаге  $t$  уменьшая  $\lambda$ , рассчитываем по формуле (3.3)  $y_i^*(t)$  и проверяем ограничение. Итерационную процедуру заканчиваем, когда будет выполнено ограничение (см. таблицу ниже).

$\lambda$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$	$\sum_{i=1}^n a_i y_i - A$
0	$y_1^{*(1)}$	$y_2^{*(1)}$	...	$y_n^{*(1)}$	$> 0$
-0.05	$y_1^{*(2)}$	$y_2^{*(2)}$	...	$y_n^{*(2)}$	$< 0$

### **Детерминированная динамическая однопродуктовая модель управления запасами**

В данной модели спрос и другие стоимостные характеристики изменяются во времени. Разобьем весь период управления  $T$  на  $m$  интервалов (месяц, неделя),  $j=1, 2, \dots, m$ . Для каждого интервала должны быть заданы (или спрогнозированы):

$\beta_j$  – спрос на продукцию в интервал  $j$  времени,

$K_j$  – затраты на размещение заказа,

$h_i$  – затраты на хранение одной единицы продукции в единицу времени,

$q_i$  – цена продукции в интервал  $j$  времени.

Кроме этого, необходимо задать уровень запасов на начало планового срока –  $P_0$  ( $j=1$ ).

В модели не допускается дефицита, а время выполнения заказа ( $L$ ) считается неизменным.

Ставится задача определения оптимального размера заказа в каждый из интервалов –  $y_j^*$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ), причем в некоторые интервалы может быть  $y_j^* = 0$ .

Целевая функция на отдельном интервале времени представляет собой затраты  $F_j(\beta_j, K_j, h_j, q_j, P_j, y_j)$ , в зависимости от количества запасов на начало периода  $P_j$  решается вопрос о размере заказа  $y_j$ . Затраты в этот интервал времени определяются по формуле:

$$F(y_j) = q_j \beta_j + \frac{K_j \beta_j}{y_j} + \frac{h_j y_j}{2}$$
 (см. однопродуктовую статическую модель).

Интегральная целевая функция имеет вид:

$$F = \sum_{j=1}^m F_j(\beta_j, K_j, h_j, q_j, P_j, y_j),$$

где  $F_j$  – затраты на функционирование системы управления запасами в интервал  $j$ .

Поставленная задача является сложной комбинаторной, но так как интегральная целевая функция представляет собой сумму, то для ее минимизации можно использовать динамическое программирование [2].

### 3.3. Вероятностные модели управления запасами

В моделях этого класса спрос ( $\beta$ ) – случайная величина с плотностью функции распределения  $\varphi(\beta)$  и математическим ожиданием  $M(\beta)$ . Далее рассматриваются однопродуктовые вероятностные модели.

#### Упрощенная вероятностная модель

Будем считать, что время выполнения заказа ( $L$ ) – постоянная величина. Обозначим через  $z$  суммарный спрос за время  $L$ , тогда  $f(z)$

– плотность функции распределения вероятностей суммарного спроса, а  $F(z)$  – функция распределения вероятностей суммарного спроса.

На рис. 3.11 представлено изменение уровня запасов в вероятностных системах,  $PЗ$  – уровень резервного запаса.

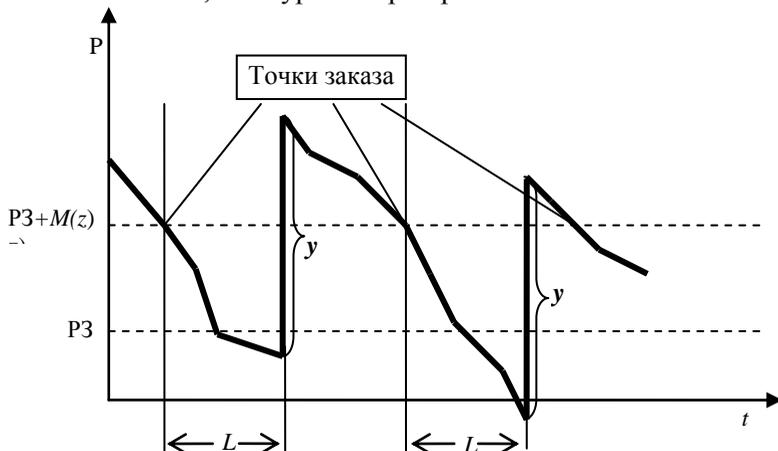


Рис. 3.11. График уровня запасов в вероятностных системах

Требуется определить  $PЗ$  при условии, что вероятность дефицита не больше, чем  $\alpha$ , т.е.  $P(z > PЗ + M(z)) \leq \alpha$ .

Используя заданную функцию распределения вероятностей, определяем квантиль  $z_\alpha$ , соответствующий вероятности  $1-\alpha$ .

Искомый уровень запасов определяется в соответствии со следующим выражением:  $PЗ = z_\alpha - M(z)$ .

*Пример.*

Дано:  $L = 4$  недели – время выполнения заказа, плотность функции распределения спроса  $f(\beta) = N(100, 10)$  – нормальное распределение с  $M(\beta) = 100$  в неделю и  $\sigma(\beta) = 10$ . Требуется определить уровень резервного запаса, при условии, что вероятность возможного дефицита  $\alpha$  не более 0,2.

Решение.

Математическое ожидание суммарного спроса за время выполнения заказа:  $M(z) = L \cdot M(\beta) = 400$ ; дисперсия –

$D(z) = L\sigma^2(\beta) = 400$ ,  $\sigma_z = \sqrt{400} = 20$ ;  $f(z)$  – нормальное распределение  $N(400, 20)$ .

Находим квантиль  $z_\alpha$ , соответствующий вероятности  $1-\alpha=0,8$ . По таблице нормального распределения  $F(X_\alpha)=0,8$ ,  $X_\alpha=0,9$ .

Так как  $X_\alpha$  соответствует нормированной случайной величине, то  $\frac{z_\alpha - M(z)}{\sigma_z} = X_\alpha$ , откуда  $z_\alpha = X_\alpha \cdot \sigma_z + M(z)$ , а уровень резервного запаса будет равен:

$$PЗ = X_\alpha \sigma_z = 0,9 \cdot 20 = 18.$$

Чтобы определить  $y^*$  (уровень оптимального заказа), воспользуемся формулой Уилсона (3.1), подставив в нее  $M(\beta)$  (в этом заключается упрощенность модели):

$$y^* = \sqrt{\frac{2KM(\beta)}{h}}.$$

Отметим, что если  $L$  – случайная величина, и задана  $\psi(L)$  – плотность функции распределения времени выполнения заказа, и, кроме того, если задана  $g(z/L)$  (условная функция плотности распределения спроса за время  $L$ ), то безусловная функция плотности распределения  $f(z)$  определяется в соответствии с выражением:

$$f(z) = \int_0^{\infty} g(z/L) \psi(L) dL.$$

Имея  $f(z)$ , можно определить необходимый резервный уровень запаса.

### Вероятностная модель с контролем уровня запаса

В данной модели точка заказа определяется оптимальным уровнем резервного запаса  $R$ , который надо определить. Кроме этого, необходимо определить и оптимальный размер заказа  $y^*$ .

Допущения, принятые в модели:

а)  $L$  – случайная величина;

б) плотность функции распределения вероятностей спроса  $f(\beta)$  за время выполнения заказа  $L$  не зависит от момента заказа;

в) неудовлетворенный спрос накапливается;

г) в любой момент времени имеется не более одного невыполненного заказа.

В качестве исходных данных дано:

$$\left. \begin{array}{l} \psi(L) \\ g(z/L) \end{array} \right\} \rightarrow f(z) = \int_0^{\infty} g(z/L)\psi(L)dL - \text{функция плотности рас-}$$

пределения спроса за время выполнения заказа;

$D$  – ожидаемый годовой спрос;

$h$  – затраты на хранение в единицу времени на одну единицу продукции;

$K$  – затраты на размещение заказа;

$P$  – потери от дефицита одной единицы продукции.

Составим целевую функцию системы управления запасами,  $\frac{D}{y}$  –

количество заказов, которые будут сделаны в течение года.

Целевая функция для оптимизации включает три составляющие:

$$F = C_{\text{разм}} + C_{\text{хран}} + C_{\text{дефиц}}.$$

Получим выражения для каждой из составляющих.

$$C_{\text{разм}} = \frac{D}{y} K - \text{годовые затраты на размещение заказов;}$$

$C_{\text{хран}} = h \cdot \bar{H}$  – затраты на хранение, где  $\bar{H}$  – средний уровень запасов.

Будем определять  $\bar{H}$  как среднее значение уровня запасов между моментами получения заказа:

$$\bar{H} = \frac{M(R-z) + y + M(R-z)}{2} = \frac{y}{2} + M(R-z);$$

$$M(R-z) = \int_0^{\infty} (R-z)f(z)dz = R - M(z).$$

Таким образом, получим:  $C_{\text{хран}} = h\left(\frac{y}{2} + R - M(z)\right)$ .

$C_{\text{дефиц}} = \frac{D}{y} \bar{d}P$  – потери от возможного дефицита, где  $\bar{d}$  – средняя

величина дефицита;  $P$  – потери от дефицита.

Дефицит ( $d$ ) – случайная величина:

$$d = \begin{cases} 0 & z \leq R \\ z - R & z > R \end{cases},$$

$$\bar{d} = \int_0^{\infty} df(z)dz = \int_R^{\infty} (z-R)f(z)dz. \quad (3.5)$$

В результате получаем целевую функцию:

$$F(y, R) = \frac{D}{y} K + h\left(\frac{y}{2} + R - M(z)\right) + \frac{D}{y} P\bar{d}.$$

Чтобы найти оптимальные значения  $y$  и  $R$ , возьмем частные производные.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{DK}{y^2} + \frac{h}{2} - \frac{D}{y^2} P\bar{d} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial R} = h + \frac{DP}{y} \cdot \frac{d\bar{d}}{dR} = 0.$$

Остановимся подробнее на определении  $\frac{d(\bar{d})}{dR}$ .

Заметим, что:

$$\frac{d}{dR} \int_R^{\infty} g(x)dx = \frac{d}{dR} \left[ \int_0^{\infty} g(x)dx - \int_0^R g(x)dx \right] = -g(R),$$

где  $g(x)$  – произвольная функция.

Тогда, с учетом (3.5),

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{d}}{dR} &= \frac{d}{dR} \int_{\bar{R}}^{\infty} z f(z) dz - \frac{d}{dR} \left[ R \int_{\bar{R}}^{\infty} f(z) dz \right] = -Rf(R) - \int_{\bar{R}}^{\infty} f(z) dz + Rf(R) = \\ &= - \int_{\bar{R}}^{\infty} f(z) dz. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения оптимальных  $y$  и  $R$  необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{DK}{y^2} + \frac{h}{2} - \frac{D}{y^2} P\bar{d} = 0, & (3.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h - \frac{DP}{y} \int_{\bar{R}}^{\infty} f(z) dz = 0. & (3.7) \end{cases}$$

Из (3.6) получим:

$$y^* = \sqrt{\frac{2D(K + P\bar{d})}{h}}, \quad (3.8)$$

а из (3.7):

$$\int_{\bar{R}^*}^{\infty} f(z) dz = \frac{hy^*}{DP}, \quad (3.9)$$

$$\bar{d} = \int_{\bar{R}^*}^{\infty} (z - R^*) f(z) dz = \int_{\bar{R}^*}^{\infty} z f(z) dz - \frac{R^* hy^*}{DP}. \quad (3.10)$$

Найдем  $y_{\min}^*$  из (3.8), приняв  $\bar{d} = 0$ , т.е. отсутствует дефицит, или уровень запасов  $R \rightarrow \infty$ :

$$y_{\min}^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}}, \quad \bar{d} = 0.$$

При уровне запасов  $R = 0$ , в соответствии с (3.5),  $\bar{d} = M(z)$ .

Из (3.9) получим:

$$\hat{y}^* = \sqrt{\frac{2D(K + PM(z))}{h}}.$$

При  $R=0$

$$\int_R^{\infty} f(z) dz = 1,$$

и из выражения (3.10) получим:

$$\tilde{y}^* = \frac{DP}{h}.$$

Если  $\hat{y}^* \geq \tilde{y}^*$ , то решение системы уравнений (3.6) и (3.7) существует. Для нахождения  $y^*$  и  $R^*$  воспользуемся следующей итерационной процедурой.

На первой итерации вычисляем  $y^{*(1)} = y_{\min}^* = \sqrt{\frac{2DK}{n}}$ , затем, используя (3.9), вычисляем  $R^{*(1)}$  и, решая уравнение (3.10), определяем  $\bar{d}^{(1)}$ . На второй и последующих итерациях ( $t$ ) рассчитываем:

$$\text{а) } y^{*(t)} = \sqrt{\frac{2D(K + P\bar{d}^{(t-1)})}{n}} \quad (\text{см. формулу (3.8)});$$

$$\text{б) } R^{*(t)} \text{ из } \int_R^{\infty} f(z) dz = \frac{hy^{*(t)}}{DP} \quad (\text{см. формулу (3.9)});$$

$$\text{в) } \bar{d}^{(t)} = \int_{R^{*(t)}}^{\infty} zf(z) - \frac{R^{*(t)}hy^{*(t)}}{DT} \quad (\text{см. формулу (3.10)}).$$

Данная итерационная процедура сходится к оптимальным значениям  $y^*$  и  $R^*$ .

Полученные результаты используются следующим образом: постоянно контролируется уровень запасов на складе. Как только он достигает  $R^*$ , делается заказ размером  $y^*$ .

### Вопросы и задачи

1. Каким образом можно рассчитать уровень резервного запаса в модели с фиксированным размером заказа (см. п. 3.1)?

2. Рассчитайте максимальный желательный запас (МЖЗ) в модели с фиксированным интервалом времени между заказами (см. п. 3.1)?

3. Проведите модификацию детерминированной статической модели с разрывами цен для случая, когда у поставщика есть два пороговых уровня заказов ( $r_1$  и  $r_2$ ) для скидок цен на закупку.

4. В системе управления запасами затраты на размещение и получение одного заказа равны 70 тыс. руб. Затраты на хранение 1 ед. продукции в течение месяца равны 100 руб. Цена закупки продукции не зависит от размера заказа. Интенсивность спроса неизменна и равна 350 ед. продукции в месяц.

Определить оптимальный размер заказа.

5. В системе управления запасами затраты на размещение и получение одного заказа равны 600 тыс. руб. Затраты на хранение 1 ед. продукции в течение месяца равны 2 тыс. руб. Цена закупки продукции равна 600 тыс. руб. при размере заказа меньшем или равном 30 шт., при большем размере заказа предоставляется скидка 15 %. Интенсивность спроса неизменна и равна 70 ед. продукции в месяц.

Определить оптимальный размер заказа.

6. В системе управления запасами затраты на размещение и получение одного заказа равны 550 000 руб. Затраты на хранение 1 ед. продукции в течение месяца равны 4 тыс. руб. Цена закупки не зависит от размера заказа. Время выполнения заказа – 2 недели. Ежедневный спрос на продукцию распределен по нормальному закону с математическим ожиданием 150 шт. и среднеквадратическим отклонением 6 ед.

Определить: а) оптимальный размер заказа; б) уровень резервного запаса, при котором вероятность возможного дефицита будет не более 0,8.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Остановимся на применении моделей исследования операций на практике.

При анализе и оптимизации параметров реального объекта исследования возникает проблема его формализованного описания и моделирования. Универсальным средством моделирования является имитационное моделирование. При этом можно получать оценки выходных характеристик объекта при изменении входных параметров, т.е. можем построить модели оценок выходных характеристик. При использовании модели оценок строится целевая функция, и при необходимости оптимизируются параметры объекта в соответствии с целевой функцией.

В исследовании операций каждый класс моделей (линейного, динамического программирования, системы массового обслуживания, игровые модели, управления запасами и др.) имеет определенный понятийный аппарат и математическое описание объекта исследования, кроме того, имеется множество постановок задач оптимизации характеристик объекта. Исследователю необходимо при анализе объекта исследования, используя понятийный аппарат различных классов моделей, определить, к какому классу он относится, и воспользоваться уже имеющимся математическим описанием и решить задачу оптимизации параметров объекта.

При решении задач с использованием моделей исследования операций следует обращать внимание на принятые в ней допущения. Вопрос об адекватности модели исследования операций и реального объекта актуален, также как и для имитационного моделирования.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа. 1988. 206 с.
2. Таха Х.А. Введение в исследование операций. 6-е изд. М.: Вильямс. 2001. 911с.
3. Федосеев Ю.Н. Методы анализа систем массового обслуживания: учебное пособие. М.: МИФИ. 1982. 58 с.
4. Кирюхин В.М. Имитационное моделирование сложных систем: учебное пособие. М.: МИФИ. 1990. 60 с.
5. Золотарев В.В., Шевченко Н.А. Основы моделирования (в системе GPSS). Лабораторный практикум: учебное пособие /Под ред. Дрекса Ю.Г. М.: МИФИ. 1990. 64 с.
6. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: учебное пособие для университетов. М.: Высшая школа. 1998. 304 с.
7. Сергеев В.И. Логистика в бизнесе: учебник. М.: Инфра – М. 2001. 608 с.
8. Логистика: учебное пособие /Под ред. Аникина Б.А. М.: ИНФРА-М. 1997. 327с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1 Распределение Пирсона $\chi^2$

Степень свободы $\nu$	Уровень значимости $\alpha$				
	0,30	0,20	0,10	0,05	0,01
1	1,074	1,642	2,71	3,84	6,64
2	2,41	3,22	4,60	5,99	9,21
3	3,66	4,64	6,25	7,82	11,34
4	4,88	5,99	7,78	9,49	13,28
5	6,06	7,29	9,24	10,07	15,09
6	7,23	8,56	10,64	12,59	16,81
7	8,38	9,80	12,02	14,07	18,48
8	9,52	11,03	13,36	15,51	20,1
9	10,66	12,24	14,68	16,92	21,7
10	11,78	13,44	15,99	18,31	23,2
11	12,90	14,63	17,28	19,68	24,7
12	14,01	15,81	18,55	21,0	26,2
13	15,12	16,98	19,81	22,4	27,7
14	16,22	18,15	21,1	23,7	29,1
15	17,32	19,31	22,3	25,0	30,6

### Приложение 2 Распределение Колмогорова

$\xi$  – значения статистики,  $P$  – вероятность того, что расхождение между теоретическим и экспериментальным распределениями произошло из-за случайных факторов.

$\xi$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$P$	1.000	0.997	0.967	0.864	0.711	0.544	0.393	0.270
$\xi$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.7	1.8	2.0
$P$	0.178	0.112	0.068	0.040	0.022	0.006	0.003	0.001

### Приложение 3 Основные положения $Z$ – преобразования

Пусть задано дискретное распределение вероятностей:

$$p_n \quad (n=0, 1, \dots, n); \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

Следующий ряд называется  $Z$  - преобразованием:

$$Z(p_n) = P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n.$$

При  $|z| \leq 1$  ряд сходится.

Свойства  $Z$  - преобразования:

$$\begin{aligned} P(0) &= p_0, \quad P(1) = 1; \\ P'_z &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n z^{n-1}, \quad P'_z(0) = p_1; \\ P''_z &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n z^{n-2}; \quad P''_z(0) = \frac{1}{2!} p_2; \\ P_z^{(n)}(0) &= \frac{1}{n!} p_n; \\ P'_z(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = M(n). \end{aligned} \tag{1}$$

В системе массового обслуживания  $P'_z(1) = L_S$ .

$$D(n) = M(n^2) - [M(n)]^2$$

$$P''_z(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n$$

$$P''_z(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = M(n^2) - M(n), \text{ откуда, с учетом (1):}$$

$$M(n^2) = P''_z(1) + P'_z(1).$$

Для дисперсии  $D(n)$  получим:

$$D(n) = P''_z(1) + P'_z(1) - [M(n)]^2 = P''_z(1) + P'_z(1) - [P'_z(1)]^2.$$

Следует также отметить следующие свойства:

$$Z(p_{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n-1} z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} p_{n-1} z^{n-1} = zP(z),$$

$$Z(p_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^{n+1} = \frac{1}{z} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - p_0 \right],$$

$$Z(p_{n+1}) = \frac{1}{z} \left[ P(z) - p_0 \right],$$

$$Z(Cp_n) = \sum_{n=0}^{\infty} Cp_n z^n = CP(z), \text{ где } C = \text{const.}$$

Рассмотрим два дискретных распределения:

$$p_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad q_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$Z(p_n + q_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (p_n + q_n) z^n = P(z) + Q(z).$$

Свертка двух распределений  $p_n$  и  $q_k$ :

$$P(z)Q(z) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_n q_k z^{n+k}.$$

Обозначим  $n + k = s$ :

$$P(z)Q(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n q_{s-n} \right) z^s = \sum_{s=0}^{\infty} y_s z^s = Y(z).$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{y_s}$$

$$y_0 = p_0 q_0, \quad y_1 = p_0 q_1 + p_1 q_0, \quad y_2 = p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0.$$

Случайная величина  $y_s = \sum_{n=0}^s p_n q_{s-n}$  является сверткой  $p_n$  и  $q_k$ .

**Евгений Алексеевич Елтаренко**

**Исследование операций (системы массового обслуживания, теория игр, модели управления запасами)**

Учебное пособие

Редактор Е.Е.Шумакова

Требования к компьютеру: Процессор Pentium-4, тактовая частота – 600 Мг, объем оперативной памяти – 256 Мгб, объем памяти на жестком диске – 10 Мгб, операционная система – Windows.

Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)

225409, Москва, Каширское ш., 31.